TURING 图灵新知

De l'infini

从无穷开始

科学的困惑与疆界

[法] 让-皮埃尔·卢米涅 马克·拉雪茨-雷 —— 著 孙展 —— 译

中国工信出版集团 人民邮电出版社 POSTS & TELECOM PRESS

让-皮埃尔·卢米涅
Jean-Pierre Luminet

世界知名天体物理学家和黑洞专家，“乔治·勒梅特天文学奖”获得者，现任法国国家科学研究院下属巴黎默顿天文台宇宙理论研究部主任，从事相对论天体物理学和宇宙学研究，曾提出“褶皱宇宙”的理论。作者同时还是一位作家和诗人，曾荣获法国艺术及文学勋章军官勋位。其著名天文学科普著作《黑洞与暗能量：宇宙的命运交响》一书荣获“欧洲科学传播奖”。

马克·拉雪茨-雷
Marc Lachièze-Rey

法国国际科学研究中心天体物理学家和理论天文学家，主要研究宇宙拓扑学与暗物质。撰写多部畅销科普著作，曾荣获法兰西学术院“莫隆大奖”。

孙展

法国巴黎索邦大学应用法语专业硕士，天津大学国际教育学院法语教师，爱好文学与舞蹈。

数字版权声明

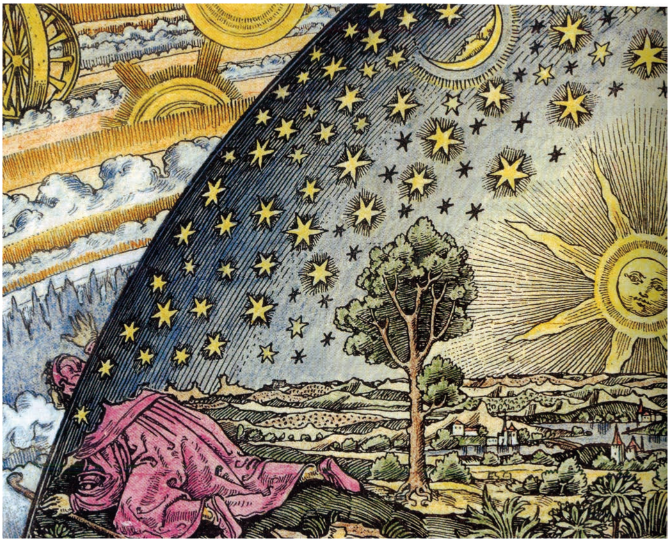


图 1.1　中世纪的同心宇宙和恒星天球

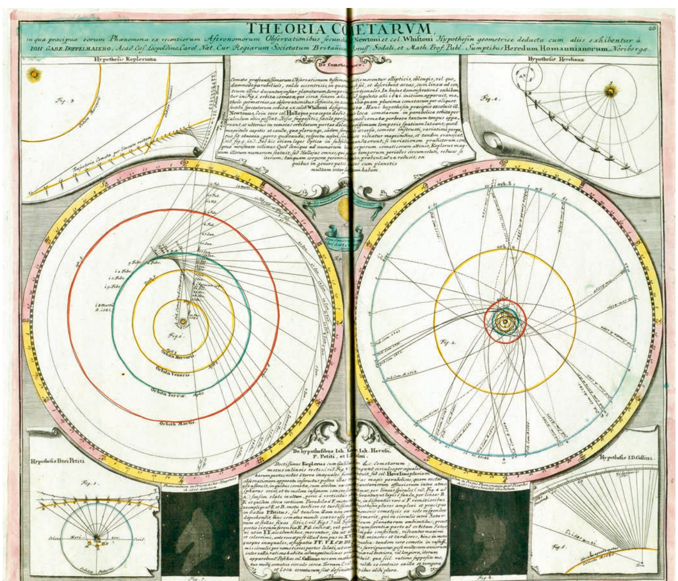


图 1.4　牛顿的宇宙空间

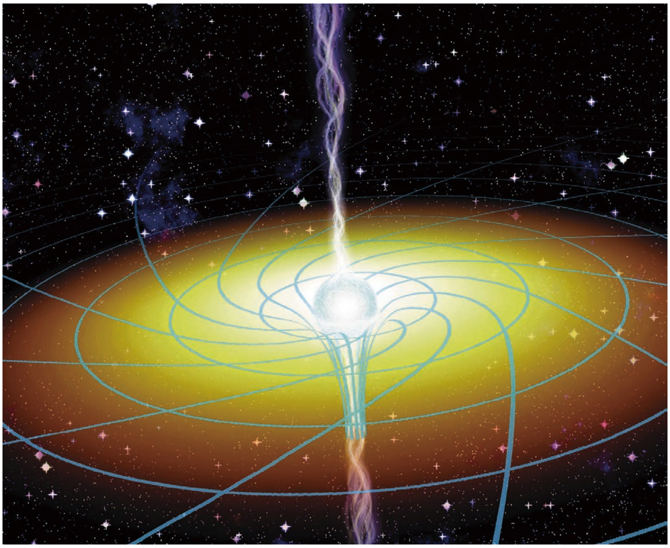


图 1.6　相对论宇宙



图 1.7　夜空



图 1.9　超新星 G299 的爆炸遗迹



图 1.20　哈勃天文望远镜拍摄到的引力蜃景

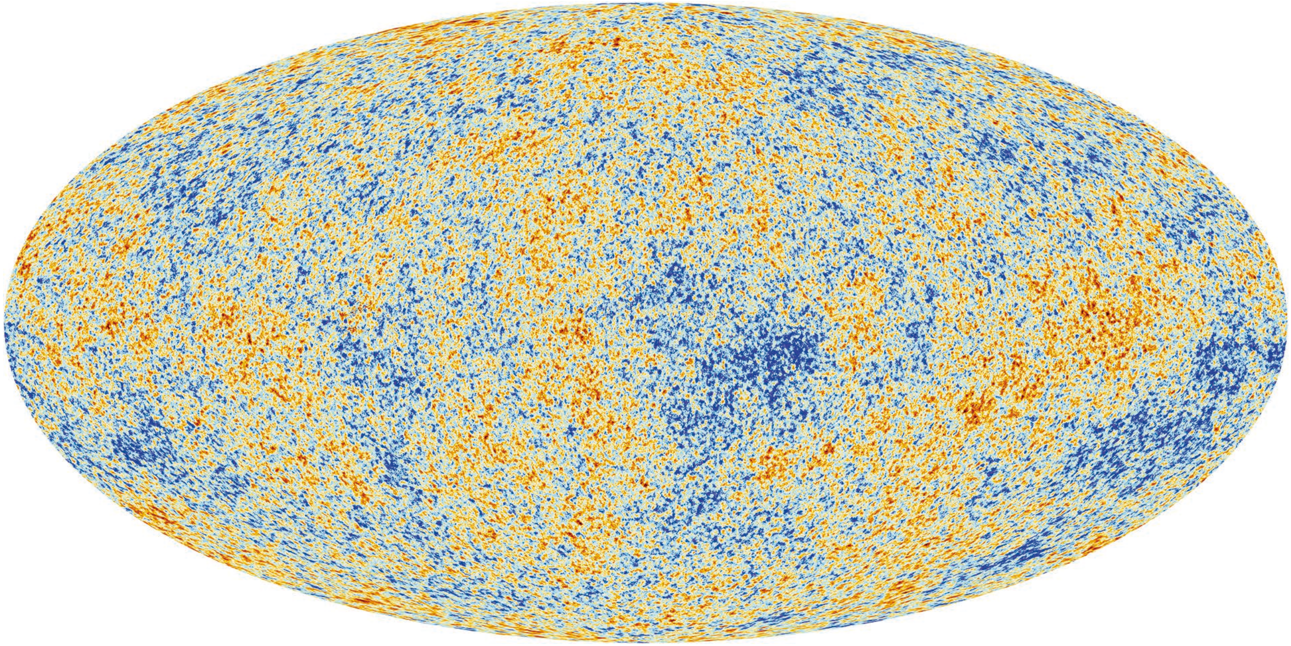


图 1.21　普朗克天文望远镜观察到的原始射线

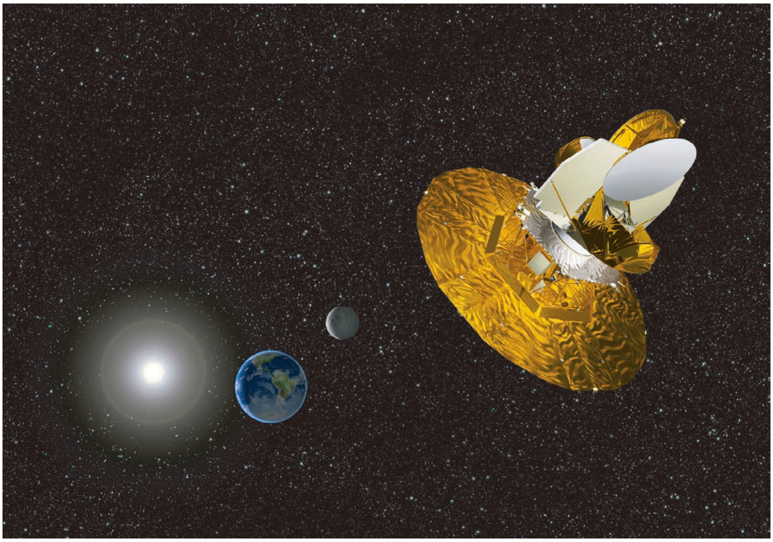


图 1.22　放置在拉格朗日 L_2 点上的 WMAP

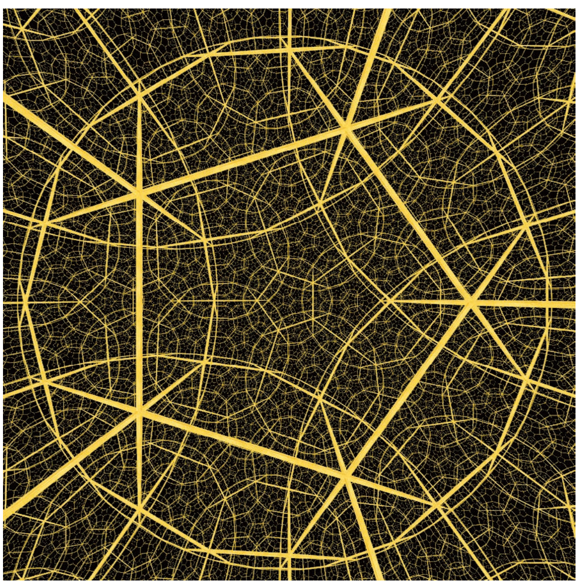


图 1.23　十二面体空间构建的拓扑蜃景



图 3.1　14 世纪的中世纪百科全书

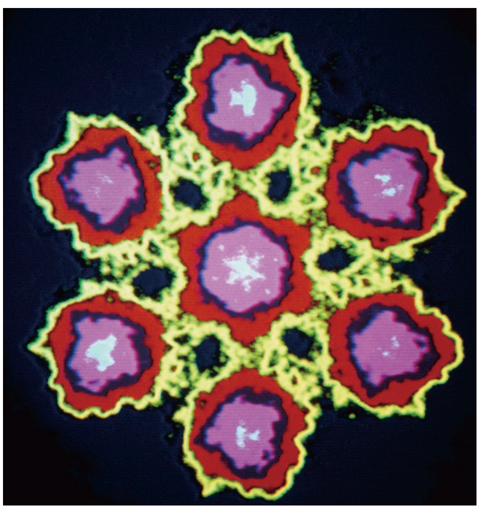


图 3.2　原子

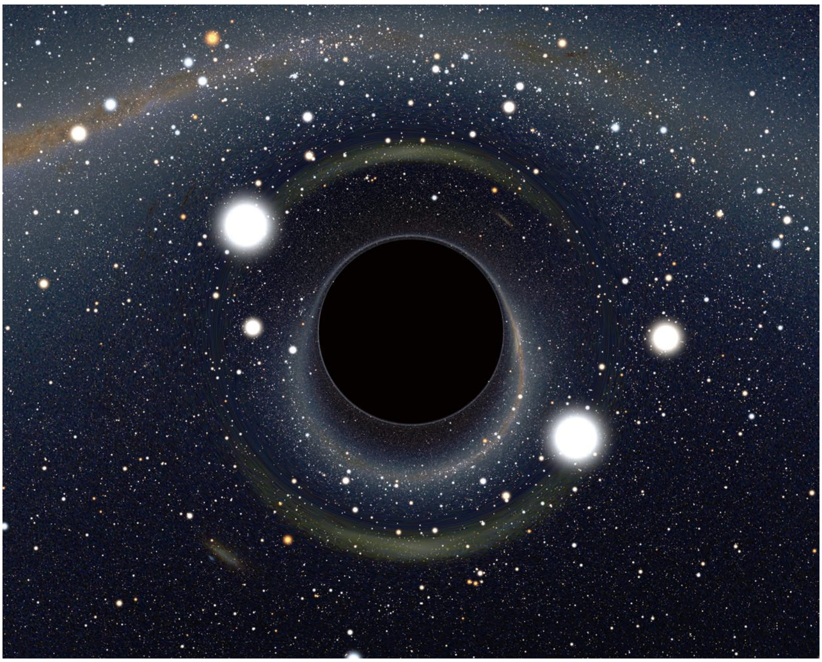


图 4.1　黑洞造成光的扭曲

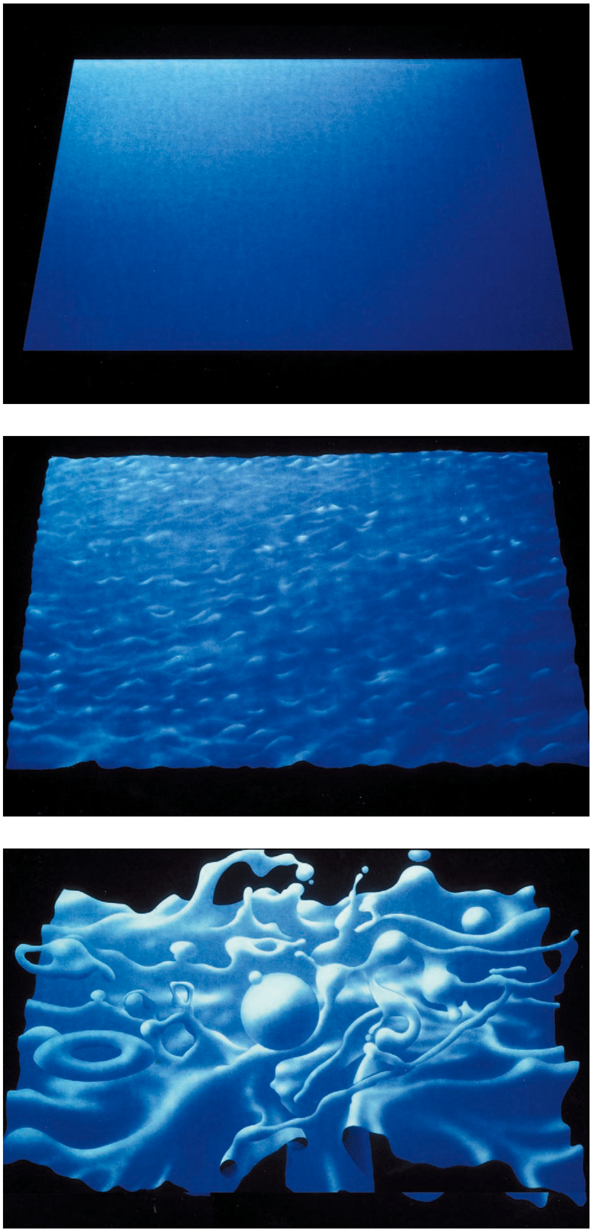


图 4.3　三种版本的空间

从无穷开始

科学的困惑与疆界

De l'infini

[法] 让-皮埃尔·卢米涅　马克·拉雪茨-雷 —— 著　　孙展 —— 译

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

从无穷开始：科学的困惑与疆界 /（法）让 - 皮埃尔 · 卢米涅，（法）马克 · 拉雪茨 - 雷著；孙展译. -- 北京：人民邮电出版社，2018.4

（图灵新知）

ISBN 978-7-115-47919-8

Ⅰ. ①从… Ⅱ. ①让… ②马… ③孙… Ⅲ. ①无限－普及读物 Ⅳ. ①B025.9-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第032792号

内 容 提 要

本书以生动的语言讲述了“无穷”的概念对科学研究和人类思想的重要推动作用，探讨了“无穷”在物理学、数学和天文学三大科学领域中的深刻意义，以及在哲学和文学中的丰富话题，从无穷大的浩瀚宇宙到无穷小的微观量子世界，展现“无穷”带给人类的困惑、恐惧、乐趣和无限启迪。

◆ 著　　[法] 让 – 皮埃尔 · 卢米涅　马克 · 拉雪茨 – 雷
译　　孙　展
责任编辑　戴　童
责任印制　周昇亮

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路11号
邮编　100164　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京　　　　印刷

◆ 开本：880×1230　1/32
印张：6.75　彩插：4
字数：157千字　2018年4月第1版
印数：1 – 3 500册　2018年4月北京第1次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2017-4511号

定价：39.00元

读者服务热线：(010) 51095186转600　印装质量热线：(010) 81055316

反盗版热线：(010) 81055315

广告经营许可证：京东工商广登字20170147号

版 权 声 明

前言

让“无穷”进来

“是谁？太好了，让‘无穷’进来。”

——路易·阿拉贡，《梦潮》（1924）

人类能直接认知的事物是有限的。但“无穷”二字经常会在思考的瞬间乍现。伊曼努尔·列维纳斯曾经说过：“有些事物能让思想超越一切限制，而这种特质就是‘无穷’。”但是，“无穷”这一概念是否真实存在于自然界，存在于试图描述自然界的科学之中？它是否存在于世间万物之中？它是否构成了一个实在、多重的现实维度？或者，它仅仅是人类思维中一种虚构的概念，没有任何一种物理现象与之对应？对于这些难题，亚里士多德曾给出过完整的阐释。

运动、空间、时间……每一种量都只有两种可能——有限或无限。然而，亚里士多德在《物理学》中提出，实际已知的实体和实际可实施的流程才是有限的。因此，他的学说并不排斥对“无穷”的思索。不过，亚里士多德并未真正承认这些概念的存在，他认为

“无穷”是“潜在的”，而并非实际存在。

一位步行者可以无限地重复行走，一步又一步……原则上，他总能再多走出一步。“无限重复”引出了最初的“无穷尽”的概念：这种总能“再向前走一步”的特性就是“潜无穷”。这一概念自然而然地联系到自然数的连续性上：1、2、3……一个数后面总跟着另一个数，不存在最后一个数，因为必有后续者。这就是“递推法”的基本原理，数的“潜无穷”概念就此诞生。

不过，数字 2 的存在已经预示着“潜无穷”，因为 2=1+1，我们完全可以照这样的式子写下去，2+1=3，3+1=4，永无止境。1 是一个单位，2 是一种变化，变化多端。如果说 2 已经预示着无穷，这是否意味着，“变化”与“多样”本身就是潜在的无穷呢？

可见，无穷不仅是自然科学问题，也是哲学问题，涉及了神学、艺术、伦理学……因此，我们需要区分宇宙科学、物质科学与数字科学，即数学。

亚里士多德把“无穷”与“未完成”联系到了一起。在继他之后的几个世纪里，科学家——尤其是哲学家与神学家，都强烈反对“实无穷”理念，他们表现得十分激动，甚至超乎常理了。早期的基督教神父们、新柏拉图派学者和经院哲学家们认为，“无穷”首先是上帝的属性。而后，这个概念从神学领域发展到数学与自然哲学领域，阐述了关于透视几何学（15 世纪）、宇宙无限大（17 世纪）与无穷小（17 到 18 世纪）的概念。由此，“无穷”变得可以被理解。从两百年前开始，无穷才作为数学与逻辑学领域中的一个独立概念被建立和归纳。

当物理学家竭力把无穷从理论中驱除出去的时候，数学家却很支持这一概念。实际上，无穷与数字和集合的概念有关。是否存在

一个数字与无穷相关？是否存在包含无数元素的集合？我们提出的问题或许有些幼稚。没有人能说清楚数学上的“存在”到底意味着什么。数字是否“存在”于我们这个维度之外的另一个现实之中？总之，无穷在两千年中一直是各种悖论的根源，这些悖论阻碍了无穷理论的建设。在诸多悖论中，最令人震撼的无异于“不可分论”（无穷小）与“自反性”（无穷大）。事实上，无穷大与无穷小这两种无穷貌似密不可分：比如，在一个极小的长度上，似乎能找到无数多个无穷小的点。

无穷在数学中“无所不在”，让人类吃惊不已。因为人是一种有穷尽、受限制的生命体，禁锢在一颗有限的星球之上。然而，我们这种有限的生物却在研究着无穷，不断探索这一概念，因为这对理解“有限”的概念是不可或缺的。一个最直接的例子就是 π 的计算，即圆的周长与其半径的比例关系。π 有无穷多位小数，但我们却用了一个包含无尽小数的数字来表达它。为了计算这一数字——阿基米德曾尝试过——需要用到一个无穷的计算过程。

19 世纪初，数学家伯纳德·波尔查诺（1781—1848）首次提出，“无穷”与“有界”处于同等状态。到了 19 世纪末，格奥尔格·康托尔（1845—1918）的研究让众多科学家心生恐慌，最终被否定、被弃置。康托尔独自战斗着，最终精神失常。如今，人们将他的研究视为现代数学的起源。

直至 20 世纪，无穷的概念几经波折，才在物理学中重新赢得一席之地。诸如场的量子理论、相对论或黑洞模型等理论引发了新的“无穷”概念。自此，“有穷”与“无穷”开始在相同的模型中并驾齐驱。

这本书描述了“无穷”在宇宙学、数学和基础物理学中平行发

展的故事。各学科的无数学者孜孜不倦地对这一主题进行阐释。我们将讲述某一思想流派或某一时代最具代表性的成果。从亚里士多德、卢克莱修、布鲁诺、牛顿、波尔查诺、康托尔到爱因斯坦，众多富有远见卓识的天才共同撰写了无穷的传记。而关键在于，我们要明白为什么在历史的每个阶段，“无穷”的物理意义都与其形而上学的意义错综相连。

了解一门科学的历史是必不可少的。一个人若不知其历史，就不可能明白这门科学的实质。在跳出历史后，我们想借助爱因斯坦之后近一个世纪的现代理论微光，来重新思考“无穷”的现实意义。尤其是，相对论仍是物理学中硕果仅存的“实无穷”之一——空间无穷、时间永恒。这也反映出相对论在科学领域中特殊的认识论地位。物理学最前沿的发展，如时空拓扑学、重正化、量子真空、弦理论、量子宇宙学都让“无穷”不断死而后生，正如传说中的凤凰涅槃……

目录

第 1 章

苍穹浩瀚

“苍穹之浩瀚，充满挑战与变迁，无边奥秘难以尽述，但相比其他，这也不过是一句略显冗长的话，说得让人喘不过气来。”

——勒内·夏尔，《异域领地》

热情与争论

“太初伊始，宇宙如同一锅无边无垠、致密而静止的汤，包含无数的粒子。天空的组成物质与地球相同，而且不由诸神统治。”两千五百多年前，克拉佐曼纳的阿那克萨戈拉（公元前 500—前 428）如是说，而他也因此成为了历史上第一位被控渎神和异端的学者。不过，相比众多后继者，阿那克萨戈拉还是很幸运的，他曾经的学生伯利克里及其他多位很有权势的朋友为他辩护，最终他被无罪释放，躲过了雅典的敌视。

从这个小故事我们可以隐约看到，自久远的年代起，无穷就曾让人们为之着迷，但也引起了诸多争议。就像大多数伟大的哲学理念一样，无穷这一概念也起源于古希腊。我们统称横跨两个世纪的

早期哲学流派为“前苏格拉底哲学”。不过，他们的主张其实大相径庭，每一个流派都试图以自己的方式尽量远离神话色彩，赋予世界一个理性的阐释：物质的起源是什么？物质之间又是如何转换的？最初与最终的元素为何物？宇宙以什么形式存在？又以怎样的规则运转？可见，在那个时期，人们就已经开始思考现代粒子物理学与宇宙学最前沿的谜题。

阿派朗

公元前 6 世纪，古希腊哲学家米利都的阿那克西曼德提出了前苏格拉底哲学的世界观的原型。他认为“阿派朗”是万物的本源。这一概念的内涵所引发的争论从未休止，因为它涵盖了多重含义：无穷（无限与永恒）、无定（不确定性）与超乎想象的无垠。“阿派朗”在某种程度上与我们今天理解的“太空”概念相吻合。

阿那克西曼德还认为，我们可以探知的领域，即这个产生各种现象的“世界”，是有限的。人类生活在“被无尽空间包围的有限世界”，这一观点持续了几个世纪。更早之前，另一位米利都学派的哲学家泰勒斯也提出了类似的观点：宇宙由水组成，而世界是一个半球形的气泡，漂浮在这个无边无际的液态物体中。

而原子论提出了另一种宇宙无穷的观点。该学说于公元前 5 世纪由留基伯和德谟克利特奠定，其中最著名的阐释者为伊壁鸠鲁（公元前 341—前 270）和卢克莱修（公元前 1 世纪）。这种学说的基础是原子的存在：原子是一种不可再分割的物质微粒（atomos 在希腊语中意为“不可分割”），是宇宙万物的本源。

原子论中的另一种基础元素是“虚空”。它构建了一个无边界的

舞台，原子在其中运动着。物质对这个无边无际的“空间”没有任何影响：从理论上来说，“虚空”是绝对的、既定的。原子不可破坏、不可改变、不可计数，只能用大小与形状区分。它们在“虚空”中永恒存在，聚集成不同的天体。自然而然，多重世界的概念由此而生。

伊壁鸠鲁在《致希罗多德的信》中写道：“世界有无穷多个，有的与我们的世界相似，有的迥异不同。因为原子的数量是无穷的，它们在空间中被拉扯得很远。其实，这些创造或构成世界的原子不会在形成一个或有限的几个世界的过程中被耗尽——无论是与我们相似的世界，还是完全不同的世界。因此，没什么能阻挡无数个世界的产生。”如此一来，原子论基于原子各种可能的组合，预言了无数多个世界的并存。创造物质与世界的原子构成了一种因果关系：因为原子是不可计数的，所以它们之间可能的组合是无数的，因而，多种多样的世界也是无穷的。

原子论的假设宏大而丰富，原子宇宙学却很贫乏。有人说，连德谟克利特自己也不知道在天空中可见星球的数目！原子论必将受到苏格拉底、柏拉图和亚里士多德的严厉批判。此外，原子论宣称宇宙不由诸神统治，而是由基本物质和“空”来掌控，所以，它不可避免地卷入了与宗教权威的斗争之中。然而，多亏了伊壁鸠鲁和卢克莱修，原子论仍能蓬勃发展，直到基督教时代的来临。基督教认为原子论过于唯物主义，于是，在基督教时代的前几个世纪，这种理论都被封杀，不再是主流科学流派的一部分。这种状态一直持续到 17 世纪。

卢克莱修的“无穷”论

卢克莱修是公元前1世纪的拉丁语诗人。他曾在一首关于宇宙的诗集《物性论》中美妙地阐释了原子的哲学。诗集第二卷专门论述了“无穷的空间”与其无法回避的推论——“多重世界论”。

“现在，请注意听这真理的学说——这是一个全新的观点，会震撼你的耳朵，在你面前呈现事物崭新的一面……若以害怕新事物为借口，就请停止排斥我这套理论系统吧；让你的判断更精准一些，好好斟酌我的观点。若你觉得它们真实可信，那就请投降吧；若你在其中只见谎言，那就武装起你的言语来辩。精神在超越我们世界的无穷空间中所探索的，就是这无垠中可能存在的东西，智慧随心所欲地探索着这广袤的空间，思想无拘无束地向那里翱翔。

“首先，宇宙在任何方向都没有边界——无论左右，不分上下；我已经给你展示过，现实显而易见，这是由物性也是由‘空’而来的。那么，如果一个自由、无界的空间向各个方向延伸开去，如果不停倍增的无数粒子用成千上万种方式永恒地漂浮开去，你是否还相信我们的星球和苍穹是唯一的造物，而在其之外的无数原子只是虚空？想象一下，我们的世界是大自然的产物，产生于原子之间偶然、自发的一系列碰撞。而那些原子，继上千次无序的运动和徒劳的结合之后，终于成功塑造了这些结合体。这种结合一完成，就自发地孕育出这些奇迹——地球、海洋、天空、生物。我重申一次，你应该相信，在其他地方也有类似我们的世界的结合体。

“每一次在具备了大量的物质和空间，并且没有其他阻碍时，命中注定就会形成物质。假如粒子的数量非常之多，以至于生物存在的全部时间都不够用于对它计数，假如别处存在同样的力量和性质，可以将这些粒子在各处聚集，并像我们宇宙中的原子一样顺序排列的话，我们就不得不承认，空间的其他地方也存在着其他星球、其他人种和野生物种。”

封闭世界

公元前 5 世纪，巴门尼德也许是第一位宇宙“有穷论”的代表人物。在他看来，世界这个“完美存在”的映像就像是一个“浑圆的球”，因此必然会有边界：“但是，由于存在一种极限，‘存在’在各个方向都是受限的，充满了这个浑圆球体的内部，自球心到边界完美地均匀分布。无所谓多，无所谓少，哪里都不存在任何变化。”

柏拉图（公元前 428—前 347）的说法更有说服力，他认为宇宙是有穷的，被一个负载着各种星体的终极球体包围、封闭。在谈及“空间”（space 一词源于拉丁语 spatium）这个概念时，希腊术语运用了不同的称呼：apeiron（阿派朗）、khaos（混沌）、kosmos（宇宙）、kenon（空）、pan（一切）、ouranos（天空）……柏拉图在《蒂迈欧篇》中又引入了一个专门的术语 khora 来指代汇聚，并定义了物质的区域或空间。这位著名的学院派奠基者在天文学思想的变革中扮演了重要角色。柏拉图强调，学者不该局限于对星辰的深思中，而应该运用几何学去探索星体的真实本质，去解释它们的运动。从亚里士多德、欧多克索斯，到 5 个世纪以后将这些概念发扬光大的托勒

密，整个古希腊天文学都围绕着这一箴言开枝散叶。

准确来说，亚里士多德（公元前 384—前 322）此后并没有继续发展“空间”的理论，而是发展了“场所”（topos）的理论。场所又称“拓扑斯”，它既有别于“区域”，也独立于“物质”的概念。场所是包围着物体的界限。宇宙并不是“某一个场所”，而是“那一个场所”，是“体”所占据的全部地方的集合。亚里士多德认为“体”与原子不同，前者的数量必然是有限的。在宇宙学层面，亚里士多德的理念与柏拉图相近：地球固定在一个有限宇宙的中心，被一个包含了宇宙中所有天体的“天球”所包围；但是，这个外部天球不存在于任何地方，因为在它之外别无所有，既非真空，也没有外延。

现实还是潜在？

不可避免地，自然科学（物理）和运动分析学促使亚里士多德首次提出了现代意义上的“无穷”问题。“无穷”真的存在吗？运动、长度、时间间隙都需要我们来决定，它到底是有界的，还是无限的？亚里士多德认为，对运动和一个物理量的拆分是没有穷尽的——在这方面，他与原子论学派的想法不同。所以，我们应该思考一下拆分一条线、一个面积、一个体积时的特性。

亚里士多德称：“如果我们可以探知一个物体的性质，那么它就是有穷的（阿派朗）；如果我们不可以感知它的特性，它就是无穷的。”他把可量化的概念写入了“无穷”的定义中。为了测量和计算所谓的量、长度或数量，就必须能区分整体与部分。结果，整体是可以拆分和分割的观点一下子跳了出来。就这样，对于某一个长度，亚里士多德区分出了三种不同的无穷。

- 组合。最典型的例子是数字，数字的叠加或相乘总能产生一些更大的数字，无穷无尽。两千多年之后，这个观点被当作构建无穷基数的理论基础，即“无穷数列”的数学理论。
- 拆分。物质就是例子，假设物质可以无限拆分，并且没有不可分的元素存在——这与原子理论相反，那么“无穷小”理论就诞生了。如果没有这个理论，现代物理学永远不会得见天日。
- 组合与拆分。时间就是例子，天球运行无始无终。

亚里士多德从根本上将“实无穷”与“潜无穷”进行了区分。“实无穷”是可以在自然界中切实发生的；“潜无穷”不过是一种为了解决某些难题所必需的思想上的虚构，没有任何一种物理现象可与之对应。这位斯塔吉拉的哲学家在《物理》一书中写道：“无穷不以成形的状态存在，不以现实的生物的状态存在。”特别是，正如柏拉图看来，宇宙作为一个物理量应该是有界的，被“最后一个”天球包围着，在这之外别无他物。

然而，亚里士多德却从中认识到“无穷”在数学上的必要性，明白了在证明中可以借助于此。因此，有另一种方法说明“无穷”的存在——乘方。这是无穷的一种仅次于实体的存在模式，但它并没有那么真实。“乘方的无穷”有一种潜在性、虚拟性。它存在于数字之中：乘方的数字可以无穷增大，但世间却没有一个极限数字、一个“真实无穷”的数字。同样，“潜无穷”也存在于长度之中：我们可以将长度拆分、再拆分，但这种拆分永远不会结束。

最后，亚里士多德理论的第三个分析术语是关于时间的。时间由运动来定义，它既可拆分也可以增加。因此，天球的运动是“无

始无终”的。这促使亚里士多德提出了“时间的无穷”的概念。这个概念因指出了“宇宙的永恒”而颇受非议，尤其是被那些意欲从哲学角度构建“神创世纪”的天启教徒所反对。

世界的尽头

“有界的世界，如地球、行星、恒星，被包围在无尽的介质之中。”这个观点在米利都学派中很少见，但可以在赫拉克利特派、恩培多克勒派或是斯多亚派等古希腊哲学流派中找到。这几个学派假设存在一种宇宙周期：此起彼伏的宇宙不断地爆炸而后又重生。但是，这与现代宇宙学家提出的“大爆炸”理论还有很大的不同。古希腊人将“物理世界”与“场所”区分开来。所谓“场所”就是现在所说的几何空间。在这里，世界（如星球）处于空间之内，被它包围并包含。这个“超宇宙空间”是无穷的，不具有物理性质。与此相反，当今的宇宙模型认为“宇宙”与“空间”是一样的，或者说“宇宙”就是“空间－时间－物质”的一个更综合的整体，我们之后会再提到这个概念。在这一点上，认为“世界”与“空间”皆有界的亚里士多德学派和认为这二者皆无穷的原子论学派都各自在宇宙学的发展历程中谱写下重要的一章。

有穷世界的悖论

最终，“有穷世界论”的信徒遇上了大难题：看上去，似乎必须给这个有穷的世界指定一个中心和一个边界。在理论上，中心不是

问题，只要把地球当作中心，就像是古代的“地心说”一样（表面上看起来如此），或是把太阳当作中心，就像是自公元前 3 世纪起，亚里斯塔克在他的“日心说”理论中提到的一样。但是，“边界”的概念就比较麻烦了。

公元 5 世纪，毕达哥拉斯学派的阿尔库塔斯第一次提出了一种悖论，试图揭露“世界的物质边缘”这一观点的荒谬之处。他的论据在所有关于“空间”的辩论中都占了上风：一个人如果站在天球的边缘，是否还可以伸长自己的手臂或举出一根棍子？若不可以，这将是荒谬的；若可以，那人所延伸到的地方，要么是一个实体，要么是一个空间。也就是说，我们就可以再超越这个空间（图 1.1）。以此类推，如果我们总是可以将棍子伸向另一个新的空间，这就清晰地表明，空间可以无边无际地扩展。因此可以说，宇宙、实体或空间之外都属于宇宙的一部分。所以，从逻辑上来说，宇宙是没有边界的，否则就会有悖论……

之后，原子论学家们重拾这一理论。比如卢克莱修，他描绘了一幅图像——从宇宙的边缘抛出一支矛；此外还有库萨的尼古拉斯、乔尔丹诺·布鲁诺等“宇宙无穷论”的拥趸。显而易见，如果我们认为宇宙犹如信封一般，是一个封闭的空间，就像柏拉图和亚里士多德想象的恒星天球（celestial spheres），那对这个悖论就无以辩驳了。但在几个世纪的时间里，“宇宙有界”论的支持者一直试图寻找一些合理的解释。其中，中世纪的基督教重塑了亚里士多德学派的学说，提出了一种“渐变边缘”：物理世界由易朽元素构成，它随着不朽的精神世界而不断变化。这种解释从两方面解决了上面的悖论：“扔出去的矛”是由地球上的物质构成的，那么，矛被扔出去后，要么掉回地球，要么确实会超过边界，但变成了虚空的元素……还有

另一种更好理解的解释——“移动边缘”，它受到斯多葛派的支持：物质世界是有界的，但界被无尽的虚空包围；将矛扔出边界将会推动这个边界，于是宇宙就会变大。



图 1.1　中世纪的同心宇宙和恒星天球

一直到本世纪初，人们还认为有穷世界应该有个边缘。但在这个边缘之外可能有什么呢？当今的数学和物理学都剔除了这个悖论：可以考虑存在一个有穷但无界的空间，也可能存在一个无穷的空间，两者并不矛盾（见彩图）。图片来源：《弗拉马里翁版画》（*Gravure sur bois de Flammarion*，无名氏，1888）。

一直到 18 世纪，非欧几里得学派的几何学的发展才完满地解决了这种争论（见“宇宙曲线中的宇宙岛”）。这些新派几何学帮助人

们设想出一些与在学校所学的几何性质不同的空间：三角形的内角和并不永远是 180°；通过直线外一点并不永远只有一条直线与之平行……尤其，这样的空间可以是有穷但无界的，就像球体表面的两个维度。另外，现代空间拓扑学的研究（欧几里得或者非欧几里得）也可以得出有穷但无界的体的结论（见“宇宙拓扑学”）。

最初，这非欧几里得空间表现出的特性看似十分怪异，但很快，数学家们就认定，这些特性其实是很完美的。接下来轮到物理学家表态了，他们也觉得自己可以呈现空间的真实面貌。在被应用到宇宙学中之后，新派几何学使我们顺理成章地认为宇宙可以是有穷但无界的。

尽管如此，这些概念却一点都不直观。在今天很多人的头脑里，仍然是斯多葛派的观点占上风。比如，对于现代宇宙学家提出的“大爆炸模型”，这些人会问：宇宙是在什么之中膨胀的？他们的脑海中始终有一幅拥有不固定边缘的“宇宙泡泡”的图像，这个宇宙泡泡在虚空、无尽的空间中膨胀着。然而，我们应该抛弃这种图像。宇宙相对论模型将宇宙与空间区分开来，更确切地说，是将宇宙与更宏观的物理和几何体区分开来，即“空间－时间－物质”。所以，宇宙——不论是有穷的还是无穷的——都不会在任何什么东西之中膨胀，因为在它之外并无空间！

宇宙中心说的概念被从“宇宙学原理”中剔除了。根据这个原理，宇宙各处都是均质的。同样，宇宙边缘的概念也被从“宇宙成分原理”中删除了：物理的宇宙包含所有物理的东西，别无其他。这种说法看似通俗易懂，其实比表面看起来要深刻得多。它特别指出，宇宙与其他物理对象不一样。所有物体都有边缘——即便这个边缘是不纯粹的，比如太阳或某一星系。然而宇宙是没有边界的。

空间与时间都不是可容纳物质的虚空场所，物质世界无法像一件物体一样置身其中。但它们都是宇宙必不可少的部分。让我们重新看一下库萨的尼古拉斯的说法："宇宙工厂到处都是中心，却哪里都不是边界。"[①]

受争议的亚里士多德学派

亚里士多德的物理学涉及了"无穷大"与"无穷小"的问题："无穷大"是要被排除的，因为宇宙是有穷的，而且宇宙之外别无他物；与之相反，"无穷小"可以被接受，但是对物质的无限分割只有潜在的可能性，并不是真正可以做到的。时间的永恒也是如此。

基督教派对亚里士多德的"潜无穷"进行了修正与改变，为了迎合假设的"神的无穷性"。就这样，到 6 世纪时，亚历山大的约翰·菲罗帕纳斯（约 480—约 565）指出了亚里士多德关于"无穷"的两篇论文所反映出来的理论难点：一方面，根据亚里士多德的说法，"实无穷"并不存在；另一方面，时间与运动是无始无终的。信奉基督教的菲罗帕纳斯提出废弃第二种假说，并以此为目标，致力于证实"创世纪"。

同样，在伊斯兰教的土地上，肯迪（约 800—约 870）是少有的几位站出来反对宇宙无穷的哲学家之一。通常来说，这是神学家们做的事。另外一位著名的思想家阿维森纳（亦称伊本·西那，980—1037）详尽地评述了亚里士多德的系列著作，他在《治疗论》中加入了一些新柏拉图主义的元素。他支持几何学上的量的限度，比如直线。但是，他关于限度的证明既不能用到时间上，也不能用到运

① 这句箴言通常被认为是帕斯卡所说，他曾在《思想录》中提到过这句话。

动上。和自己的导师一样，阿维森纳区分了空间的量与时间的量。相反，他却支持“实无穷”的存在，比如，人的灵魂有无穷多。为了反驳“转世说”的支持者，阿维森纳提出人类的灵魂与肉体无关，灵魂正在无止境地增加！

直到此时，亚里士多德关于“无穷”的观点只是在某些点上被否定。但是，一位阿拉贡的犹太教神学家哈斯代·克莱斯卡（1340—1412）对亚里士多德学派的所有观点都予以否认。在他的神学－哲学著作《神之光》中，克莱斯卡巧妙地支持了“宇宙无穷”、可能存在的多重宇宙和虚空的观点。总而言之，他认为现实中量与数存在无穷性。

在基督教统治的中世纪欧洲，红衣主教库萨的尼古拉斯（1401—1464）同样反对亚里士多德，并宣扬“实无穷”的观点。他认为，在一个圆形内部存在一个多角形，其角的数量“在现实中”是无穷的。“实无穷”是一种认知模式，因为“各种异议都就此迎刃而解”。在宇宙学方面，库萨的尼古拉斯受到卢克莱修的一篇文章的影响，文章于 1417 年在一所修道院被发现。在这篇文章中，卢克莱修支持了“宇宙无穷”和“多重世界”的观点。在《论博学的无知》（1440）一文中，卢克莱修给出了形而上学的论据：上帝不会局限在自己的创造物中；根据“充实性原则”，上帝的创造物，即这个世界，也不会有任何边界。

这个论据被频繁地引用，尤其是布鲁诺、笛卡儿和斯宾诺莎等人。在天文学上，这个论据暗示了地球的运动方式。实际上，一个无穷的宇宙不会有中心，地球也不会在宇宙中占有任何不变的、特殊的地位；在地球周围运动的星体也不隶属于它——是地球在转动和移动，而不是宇宙！库萨的尼古拉斯还率先提出了“宇宙原则”

（20 世纪才成形），为现代宇宙学，特别是“大爆炸模型”奠定了基础。现在，有诸多事实可以支撑这个原则，比如银河系，更确切地说是银河系中的星团和超星团，向着各个方向大规模地扩散；比如我们观察到的宇宙微波背景辐射——这是一种独一无二的辐射，是充满了整个宇宙的热大爆炸遗留下的痕迹。

恒星天球间的裂缝

亚里士多德学派主张时间永恒和非神造的宇宙学说，因此一直被早期的基督教神学家们所摒弃。一直到 11 世纪，西方的各种宇宙模型都回归到米利都学派的古老概念上，它们认为，一个有限的宇宙沉浸在一片虚空之中，但区别在于，宇宙的形状类似于一个帐幕或一个心形。经过天文学家克罗狄斯・托勒密的完善，亚里士多德的宇宙学说还是重新被西方世界所接受。这还要多亏了阿拉伯人的翻译和注解。而且，人们对其做出了调整，使它符合了神学家的想法，尤其是，在宇宙最后一个物质天球之外的地方最终被视为“空间”。这个空间可能是物理的，也可能是神的或者精神的。在这“九霄云外”，是上帝、众天使与诸神的领地。

但丁在《神曲》中很好地描述了中世纪的宇宙：它不仅是有穷的，而且以固定的地球为中心；但是宇宙很小，从地球到恒星天球的距离估计只有 20 000 倍地球半径——天堂的边界理所当然要在亡者的灵魂可及之处。自然，基督徒将自己定位于宇宙的中心。犹太哲学家迈蒙尼提斯（1135—1204）在《迷途之书》中表达了这样的看法：恒星天球的半径相当于每天走约 160 千米、连续行走 8700 年的距离——对于穿越炼狱的灵魂来说，这倒是一个合理的时长……

1543 年，波兰的议事司铎尼古拉斯 · 哥白尼（1473—1543）重新引入了“日心说”——这是公元前 3 世纪就已经成形的假说，当时是由萨摩斯的亚里斯塔克提出的。但是，尽管库萨的尼古拉斯曾经想让它重见天日，这一假说一直被束之高阁。哥白尼提出了“地球不是宇宙中心”的假说，主张“所有天体围绕宇宙的中心旋转，中心与太阳的中心几乎重合”。他认为“天体的运动来自地球的运动而不是苍穹的运动”“地球以两极为轴每天自转一周，以太阳为中心在黄道面上每年公转一周”。

尽管如此，哥白尼仍然保留了亚里士多德学派中关于“被恒星天球包围的有穷宇宙”的观点。他只是提出，这个宇宙十分巨大，并从哲学角度重新阐释了这个“宇宙泡泡”:“恒星天球……包含了一切，包括它自己。”然而，日心说却孕育着一场根本性的革命：过去，人们认为宇宙绕着固定的地球旋转，所以很难想象宇宙可以是无穷的；但是，一旦承认了天体肉眼可见的运动是由地球的运动引起的，之前的困惑就不存在了。此外，哥白尼扩大了中世纪的宇宙模型。他的模型比托勒密和迈蒙尼提斯的模型大了 2000 倍——近似于无穷，但尚未无穷。

1572 年，第谷 · 布拉赫发现了一颗“新星”[①]。这颗新星为彻底动摇亚里士多德学派的宇宙学提供了第一个可观测证据。这颗星出现于恒星天球中，也就是说，出现于月球以外的宇宙中，而在此之前，人们一直以为月球以外的宇宙是静止不变的。

从 1576 年起，当时最权威的天文观察家、英国哥白尼学派的领导者托马斯 · 迪格斯打破了恒星天球的固有格局，并将其中的星星划分到无尽的空间中去。迪格斯在《对天体的完美描述》（1576）一

① 今天，我们知道这是超新星的爆炸。

书中，有史以来首次详尽地展示了一幅天体图（图 1.2）。图中的星体不再固定在最后一个天球的薄薄表层之上，而是零星分布于无穷之中。这种新模式让人们的认知从古代封闭的宇宙突然跨越到一个无穷的或至少也是极大的宇宙，里面布满了无数的星与中心天体。然而，迪格斯还是没有提出无穷空间的物理构想。对他来说，天空与星星仍然是“九霄云外”的组成部分，那里是上帝的处所，因此，它们并非真正属于我们感知的宇宙。

布鲁诺：对“无穷”的狂热

两位意大利哲学家的研究真正令人类的认知大有突破。1587 年，弗朗切斯科·帕特里齐（1529—1597）发表了《物理空间与数学》一书，书中展现了一个极具颠覆性的观点。帕特里齐认为，几何学的真正对象是空间本身，而不是人们从欧几里得时代开始就认为的图形。帕特里奇开创了一个崭新的、均质的、无穷的物理空间概念，这个空间符合数学原理，因此也在人们的认知范围内。

然而，同时代的乔尔丹诺·布鲁诺（1548—1600）才是真正的“无穷宇宙”概念之父。激情洋溢的布鲁诺曾于 1584 年在《圣灰晚餐》中这样描写自己：“他就这样出现了：跨越地表，穿越天空，越过星际，冲出宇宙的限制，打破众人对天体的想象之墙——那些源自徒劳的数学计算，或是又聋又哑的哲学家所谓的第一层天球、第八层天球、第九层天球、第十层天球，甚至更多……是他，以自己的才能之钥，通过一系列研究，打开了人们从不曾抵达的真理禁区。他揭开了自然的面纱，让被蒙蔽的双眼重见天光……我们终于知道：只有一个天空，一片巨大的空际。在那里，奇妙而闪耀的星体保持

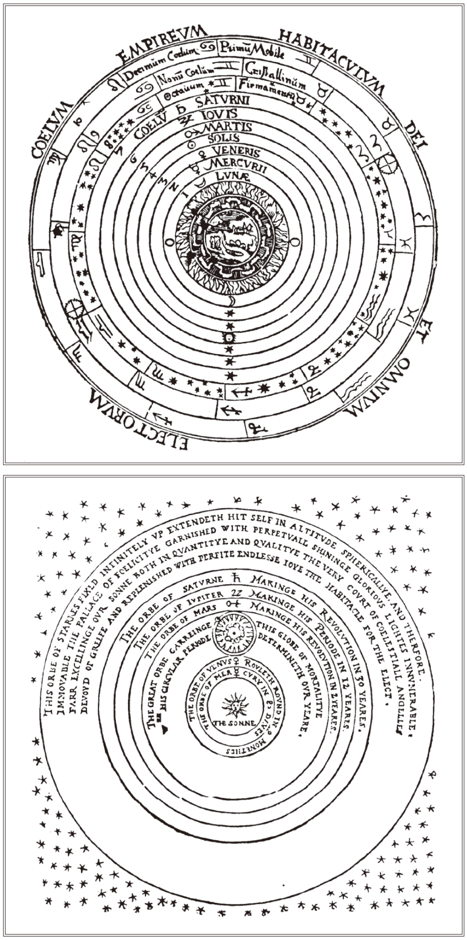


图 1.2　两种宇宙模式

有限宇宙的空间性质逐渐被发现。两幅图简要展示了“有穷的封闭世界”被恒星天球包围的样子（上图，阿皮纳斯的地心说简图，1524），以及在新宇宙模型中，星体分布在四面八方、距离不一，宇宙看起来无边无际（下图，迪格斯的日心说简图，1576）。© D.R.

着必要的距离，缔造广袤与永恒。”

布鲁诺花了大量精力写下许多著作。《巨大》的第一卷全部用来给“无穷空间”下定义。在《论无限、宇宙和诸世界》一书中，布鲁诺严厉批判了亚里士多德的理论系统。他特别以宇宙边界的悖论为依据，强烈拥护“宇宙无垠”与“多个有生世界”的观点。布鲁诺将自己的主张与大胆的设想相结合，把“无穷的宇宙”视为“无穷的神力”。他说：“我们为什么要相信或者必须相信神的力量会袖手旁观呢?”世上只存在一个宇宙，一片巨大无边的天际，在那里，奇妙的星体闪烁着和太阳一样的光。我们被指引着，去探索“无穷的原因”所引起的“无穷的结果”：拥有无穷力量的神只能创造一个无穷的宇宙。神的“全能”最终胜利了，打破了中世纪体系的限制；与柏拉图和亚里士多德相反，布鲁诺崇尚“无穷”和“宇宙”，而“宇宙”之所以完美，恰恰因为它是无穷的，而不是有穷的！

布鲁诺还认为，人们能观察到的一切都是有穷的。从这一点出发，他逐渐走上了相信“无穷”的理论之路：地平线不过是一条表象的边界，它随着观察者的移动而移动。布鲁诺通过这些惊人现代化的论据，驳斥了之前众人的一个共识：所有的星体距地球一样远，它们就像都被固定在一个终极天球上一样。布鲁诺不断释放自己的激情：“我那信仰的双翼是向着天空伸展的，无惧任何阻碍，不畏任何水晶或玻璃；我冲破天际，自立于无穷之上。当我扎根于这个星球向着其他星球伸展的时候，当我超越无垠天际的时候，我把他人远眺的东西留在了身后。”

布鲁诺的论证以物理学为基础，而不再纯粹以神学为基础。他在全欧洲宣扬自己的理论学说。布鲁诺的思想受到卢克莱修的原子论、库萨的尼古拉斯的推论，以及哥白尼的理论的启迪。对于哥白

尼的理论，布鲁诺保留了其关于日心说和太阳系布局的观点，但抛弃了“有限宇宙包围在恒星天球中”的“宇宙有穷论”。布鲁诺早在开普勒与牛顿之前就摒弃了对“天球”和“不变的环形运动”的美学信仰。

从此，任何限制、阻挠或禁锢都无法阻止“万物无穷”理论的大爆发。但是，“多重世界”这一想法给基督教神学思想抛出了不少难题。如果存在多个有生世界，“神降”又应该发生多少次呢？仅仅一次？这么说，地球应该处于一个特殊的地位：如果我们考虑“神降”好的一面，那么地球就处于优势地位；反之，想想就十分可怕，地球成了唯一曾经犯下原罪的地方。假如“神降”曾发生过很多次，那它就会因为不断重复而变得普通无奇，那它就不再是一个奇迹——根据定义，奇迹应该是独一无二的。

所以，宇宙学真正的颠覆不在于承认哥白尼的“日心说”，而在于肯定无限宇宙的多重性。就是这个原因，布鲁诺于 1600 年 2 月 17 日在罗马的鲜花广场上，走上了火刑架。在囚禁于罗马的这段时光里，布鲁诺仍不停地向狱友传授自己的观点：大家透过监狱小窗隐约看见的所有恒星光点，都能构成与我们的世界相类似的世界。

新的天文学

尽管布鲁诺的观点很有说服力，但在那个时代，他几乎没有任何科学上的影响力。没有任何的天文观察能支撑他的那些对抗基督教学说的理论。他的思想是反叛而具有破坏性的，那个时代的大多数人都不理解他的说法，特别是伽利略。布鲁诺的理论直到 18 世纪才被启蒙思想哲学家们重新发现。而直至 19 世纪，实证主义科学成

功战胜了教会后，布鲁诺的传奇形象才终于被树立起来。

然而，迪格斯的故乡英国多少挣脱出宗教权威与教义的管制，威廉・吉尔伯特和亨利・摩尔在那里捍卫了“日心说”与“多重宇宙”的理论。吉尔伯特在《磁石》（1600）一书中不仅论证了地球像一块磁石，还证明了星体距地球的距离不等，而且太阳靠磁力牵引着这些星体。

天文学革命的两大领导人约翰尼斯・开普勒（1571—1630）和伽利略（1564—1642）却在“无穷”的问题上十分谨慎小心。1596年，开普勒最先尝试用特殊的几何图形——规则的多面体——来构建宇宙模型。但他失败了。星体轨道的计算模板并不适用于第谷・布拉赫所收集的新的实验数据。1609年，开普勒发现了星体轨道是椭圆形的（图1.3）。于是，他抛弃了被亚里士多德学派视为星体运动的唯一解释的“不变的环形运动”观点。然而，他拒绝在“宇宙的无穷性”这一问题上跟随布鲁诺的脚步。开普勒认为，这个观点纯粹是形而上学的，没有实验基础，脱离了科学的定义：“事实上，一个无穷的实体是不可能被思维所理解的。无穷的思想要么与‘无穷’这个词的定义有关，要么与某种超越了任何可想象的数字、视觉和触觉的维度有关，即与某种非现实的无穷有关，因为无穷的维度是不可想象的。”为了证明自己的论点，开普勒首次提出了一个天文学佯谬。这个佯谬无疑给“无穷空间”的概念制造了很大障碍，也招来了诸多非议，这就是“黑夜佯谬”（见“夜之黑，‘无穷空间’的第一佯谬”）。和“边缘佯谬”一样，这个难题直到19世纪中叶才被完美地解决了，但完全是由其他论点论证的。



图 1.3　开普勒的《新天文学》

在 1609 年发表的《新天文学》一书中，开普勒根据第谷 · 布拉赫的观察推导出了一种新的太阳系模型：星体的运行轨道是椭圆形的，太阳位于其中一个焦点上。这为之后笛卡儿和牛顿的研究工作，以及经典力学理论的提出奠定了基础。© D.R.

剑桥的柏拉图学派

哲学家亨利 · 摩尔（1614—1687）是剑桥柏拉图学派的领导者，他紧跟布鲁诺的步伐，奠定了“绝对且无穷的空间”的观念。之后，牛顿又进一步完善了这个概念。关于“原子论”和“多重宇宙”，摩尔曾写下这样狂热的语句：“我们这个宇宙的众星就像神话中赛姬女神披巾上的结。最初，这条披巾是一块又细

又薄、可以透水的织布，后来，隐藏的力量将这些结凝聚在一些点上，并将四周物体聚成一体。在地球上所发生的一切都同样发生在其他每个星体上。我们远远眺望到的每一个光晕，都是赛姬披巾上的结。”（《无穷宇宙论》，1646）。就在牛顿用《自然哲学的数学原理》革新了宇宙学的那一年，亨利·摩尔去世了。

从1609年开始，伽利略用望远镜观察到的结果提供了宇宙自然法则的第一批直观数据。但在“无穷空间”这个问题上，伽利略和开普勒一样，也采取了物理学家一贯的谨慎态度：“辛普利西奥大人，现在我们要拿这些恒星怎么办呢？我们要将它们散布到宇宙的深渊里去，从任何一点算起都距离不等？还是说，把它们放在从球心延展而出的同一个球状表面上，所有恒星到球心的距离都是等距的？”[①]伽利略总结道：“您不知道吗？宇宙究竟是有限的还是无穷的，这个问题还没有定论。我觉得对于人类科学来讲，这恐怕永远是无解的。”

总之，通往建立在“无穷空间”之上的全新宇宙学道路终于打通了。直到这时，空间概念仍限制在宇宙学和物理学的范畴之内，而不是处于类似欧几里得的几何图形与几何构造的背景之下。换言之，物理空间还没被数学化。这一演变还要多亏了勒内·笛卡儿（1596—1650）。笛卡儿将每个点都具化为一个由三个真实的数所构成的集合——坐标。统一的坐标系将空间格式化，使距离可以被测量。在笛卡儿看来，引入坐标系后，无论在笛卡儿物理学还是在几

① 伽利略于1632年出版了《关于两种世界体系的对话》，书中以三个人对话的形式为“日心说”辩护，指出“地心说”的错误。书中一个人物名为辛普利西奥，是一位主张“日心说”的亚里士多德学派愚者。书中还暗讽了教皇和教会，最终给作者招来了牢狱之灾。——译者注

何学体系中，宇宙的统一性和标准化变得毋庸置疑。空间是与物质一样的实体，无数的旋涡在无尽的以太之中搅动，恒星与其行星系统就位于这些旋涡的中心。无论是地球、太阳或其他任何一个星体都不占主导地位。每个恒星都是各自旋涡的中心，与我们的中心恒星类似或迥异。

然而在形而上层面上，笛卡儿承认，如果人类有限的认知力承认了“无穷”这个概念，那么“无穷”就仅属于唯一的造物主：“我只愿意相信，唯有上帝是无穷的。”

宇宙新感观

新的天文学打破了天球的硬壳，将宇宙的边缘扩展到无限大，直至消散在一片无穷的空间中，给长期囚禁在牢笼之中的人类思想带来了自由的喜悦。尽管如此，全新的宇宙观在颠覆了人类长期以来关于宇宙的所有哲学思想与感观之后，也让人们与原子学派和布鲁诺最初的信念渐行渐远。“封闭的世界”，即“一些同心圆嵌合体包围的宇宙”，令人安心，因为它为人类提供了一个大小正好的“封闭房间”。而“无穷的宇宙”却是焦虑和恐惧的源头。我们既看不到宇宙的中心也看不到它的边界，个人在其中没有任何参照物。作为有序整体的宇宙毁灭了，地球独霸已久的中心地位丧失了，人类不可避免地丢失了自己在《创世纪》这出剧中独一无二的主角地位。在这场变革的尾声，人们发现了一个寂静无声的宇宙。“放荡的”无神论者帕斯卡都觉得恐惧：“这些无穷空间的永恒沉默让我恐惧。”因此，诗人博尔赫斯（1899—1986）曾说：“这绝对的空间激发了卢克莱修创作六行诗的灵感，给予了布鲁诺自由，却成了帕斯卡的迷宫与深渊。”

牛顿的宇宙学

布鲁诺、摩尔和笛卡儿发起的空间几何化与无穷化的革命，最终交由艾萨克·牛顿（1642—1727）完成。这位英国智者用“普遍的引力”一词来解释天体力学，换个词就叫作“万有引力”。从此，万有引力成了宇宙构成的公认原因。引力的范围是无穷的，因此牛顿宇宙学主张空间也是无穷、绝对的。这既是一个数学、物理、天文学概念，也是一个形而上学的概念，因为空间是“上帝的感觉器官”（sensorium Dei）。物理空间最终与几何空间融为一体，它一定是欧几里得空间的（当时唯一被认知的模型），没有弧度，不可改变，在各个方向都是无穷尽的。在这个固定的框架内，引力塑造了宇宙。在牛顿宇宙学和希腊学派残存的影响力之下，欧氏的无尽空间和永恒时间这种宇宙学观点在两个多世纪里深入人心（图 1.4）。

牛顿的宇宙学并没有解决所有问题——远远无法解决。比如，牛顿认为星体分布于空间中一个有限的区域内。他声称，如果星体占据的是一个无限的空间，它们的数量将是无穷的，引力的力量将是无穷的，宇宙将是变化无常的。于是，牛顿假设星体呈均一分布，以便构成一个有尽的聚集体，比如说星系。但是“不稳定”的问题仍然存在：每个星体都彼此吸引，最微小的运动、最细微的力的扰动，都会让所有天体向着同一个中心坠落，而宇宙会就此坍塌。因此，牛顿的宇宙学如果不承认大规模运动，就无法成立：这种宇宙的空间是僵化的，时间是静止的。

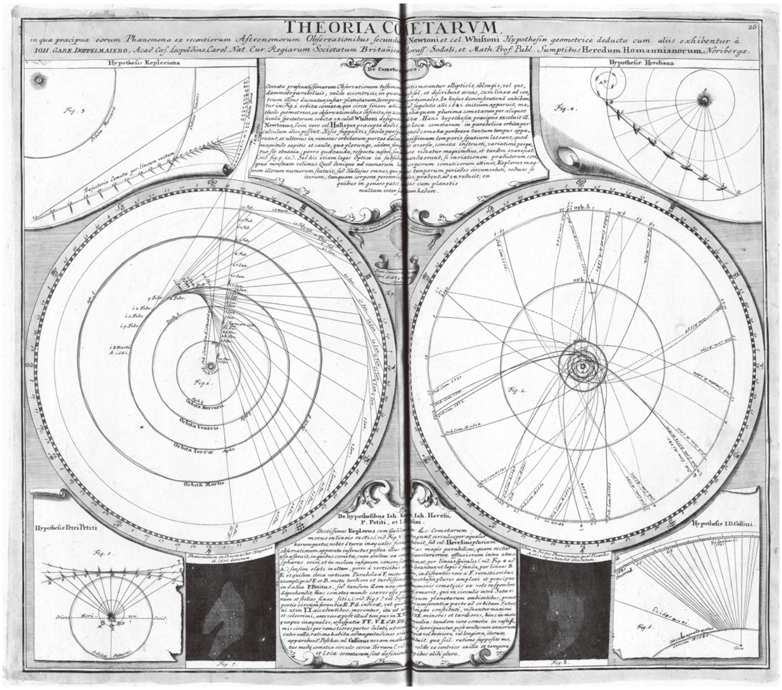


图 1.4　牛顿的宇宙空间

牛顿的宇宙空间由笔直的光线编织而成，彗星、行星和恒星沿着由万有引力规定好的精确轨道运行。图 1.4 来自 1742 年多佩玛发表的《星图》，图中汇集了在牛顿理论体系下太阳系不同彗星的轨道（见彩图）。

这就是牛顿

1661 年，艾萨克·牛顿进入剑桥大学的三一学院学习数学。伦敦爆发了鼠疫，迫使他不得不休学。在休学期间，牛顿专心研究最初的数学计算工具。在此几十年前，开普勒发现了星体运行规律，并提出太阳放射着一种类似磁力的吸引力；伽利略开创了

一种哥白尼宇宙系统，将天体物理与地球物理的规律统一起来；之后，笛卡儿又提出了一种宇宙模型，与之前的“地心说”封闭宇宙截然不同，这种模型主张一种“无穷的空间”，其中填满了呈旋涡状流动的物质。

然而，年轻的牛顿意识到，一些星体和彗星的运动不符合笛卡儿的解释。需要建立一种新理论。牛顿看出，在地球重力的影响下而下落的物体与围绕太阳运转的星体都反映了一种普遍性的现象，他把重力定义为“吸引力”。1666 年，牛顿发表了“大质量物体之间相互吸引”的假说。实际上，他用几何方式展示了星体沿椭圆轨道运动，而太阳在椭圆的焦点上，这也是力的中心。这种椭圆运动必然导致吸引力与星体自身体积成正比，与相互间距离的平方成反比。为了证明这个理论，牛顿发明了“流数法”，即后来莱布尼茨独自发展的微积分。但直到 1687 年，在天文学家爱德蒙·哈雷（1656—1742）的敦促下，牛顿才在自己的巨著《自然哲学的数学原理》中公开了这一研究成果。

但是，戈特弗里德·威廉·莱布尼茨（1646—1716）坚决反对这个观点。虽然说，莱布尼茨也认为空间是无穷的。但在更深层面上，他在很多观点上都与牛顿持不同意见。

对莱布尼茨来说，空间没有任何绝对属性：空间是实体之间的一种理想关系，并非实际存在，并且独立于这些实体。另一方面，莱布尼茨认为恒星均匀分布于无尽的空间之中；如果情况并非如此，就会存在一个包含所有星体的天球，而物理宇宙将被这个天球包围，并拥有一个中心。但哥白尼认为宇宙中不存在任何一个特殊位置，所以这一说法是不可能成立的。

“无穷论”的诗人们

牛顿宇宙学的诞生改变了人类的世界观和对自身在宇宙中的地位的看法，也给许多哲学家、作家和诗人带来了深刻影响。人们分成了不同派别：一想到“地球之舰漂浮在一片无尽海洋之中”，有人感到头晕不适，而有人已准备好乘风破浪……

在诗歌界，英国人爱德华·杨自 1742 年就成了牛顿宇宙学和“无穷论”的拥趸。他的长诗《夜思录》影响了欧洲整整几代人。在意大利，贾科莫·莱奥帕尔迪伯爵在《无穷》（1819）一诗中这样评论海洋：当我们超越时空去观察海洋，它就变成了一种真实的存在。他认为，人类会自然而然地趋于认同无穷。四海为家的拜伦在《空间的深渊》（戏剧《该隐》第二幕，1822）中提到了看待无穷的两种角度：“上界”的无穷指向对一些生命麇集的世界的宏伟预言；但也存在维克多·雨果所称的“下界”的无穷，这是一个内在的深渊，走失的灵魂坠落其中。

在大西洋彼岸的美国，沃尔特·惠特曼不仅被“无穷”这个概念深深吸引，而且将其据为己有（《自己之歌》，1855）。作为崇尚“宇宙膨胀说”的诗人，惠特曼也欢欣鼓舞地与宇宙一起膨胀着。“无穷”是他的领地，他像个领主一样在其中漫步，检视种种成果。惠特曼和世间万事万物都充满了创造力。他发展着自己的“知足哲学”：每个造物都应该满足于自己的位置，因为每个位置都是独一无二的。

“永无止境，也不应有止境，
如果将我、你、世界，一切地下和表面的万物
同时回归一片白茫茫薄雾，漂浮于空中，

无论如何都要归于虚无。

我们必将回到此刻的位置，

必将去向更远的地方，再远一点的地方，

数千万亿年、数千万亿立方都不能困住这片刻时间，也不会让它焦急，

这只是一些片段，一切都只是一些片段。

极目远望，视线之外仍有一片无垠空间，

长生不死，生命之外总有一段无尽时间。”

19世纪后半叶，牛顿关于“空间”的理论占据着空前的主导地位。马克·博纳富瓦的组诗《穿越无穷的诗》中甚至有一个小标题《牛顿在太空中领导一个世纪》！博纳富瓦将这位科学巨擘搬出来，安慰在黑暗的太空面前感受死亡颤栗的太空旅行者。诗人还提到了“多重宇宙”这个主题：如果这些世界中没有挤满熙熙攘攘的生命，无穷又有什么用处呢？

“无尽的时间流逝了一个又一个世纪，

无穷永无止境地铺展；

我们竭尽努力也无法靠近目标。

这道路周而复始地延伸，

在无边的道路上，我们筋疲力尽，

却仍寸步难行！

拥挤的以太中总有明星照耀，

远一点，更远一点，恒星在闪烁，

有的星辰正璀璨，有的星辰已陨落，

任谁都是宇宙的负荷！

但我们瞥见的仅是苍穹一角，

广袤无边中的一道光辉；
我们不停翱翔，
却终不能登峰，亦不会坠渊，只因
‘无穷’的延伸没有尽头，没有巅峰：
除了空间，还是空间！”

宇宙曲线中的宇宙岛

牛顿宇宙学让“空间与时间的无穷”大获全胜——当然只是暂时的。“无穷宇宙”开启了欧洲思想启蒙时代。一些思想家试图在其中寻找到些许组织性，故提出了一种观点：空间并非千篇一律地由星体构成，而是星体以“宇宙岛”的形式组合在一起，即现在所说的“星系”；这些“宇宙岛”是有等级秩序的。相比专业的天文学家，伊曼纽尔·史威登堡（《哲学歌剧》，1734）、托马斯·莱特（《独特理论》，1750）、约翰·海因里希·朗伯（《关于宇宙组织的宇宙学之信》，1761），特别是伊曼纽尔·康德（1724—1804）等自然主义哲学家更倡导这种独特的宇宙架构。

这位伟大的德国哲学家在其年轻时所著的《自然通史和天体论》（1755）一书中写道：“当我们意识到所有庞大星体组成了一个不知边际的集合，而这个集合可能与各个星体一样大到不可想象，也可能又组成了一个全新数量级的集合，这时，我们的惊恐之心会怎样放大呢？我们看到多重世界和体系之间一个递增关系的萌芽，而这个无穷递增关系的第一环已经让我们叹为观止。”康德重新举出了一个旧理论论据：“世界是无穷的，因为上帝是无穷的，而世界依存于上帝。”

之后，康德在《纯粹理性批判》（1781）一书中更深层次地探讨

了无穷与宇宙学的关系：宇宙是否有一个时间上的开端和一个空间上的边界？他首先驳斥了“宇宙时间是无穷的”这一说法，依据是托马斯·阿奎那的经典论据：一种既无穷又流动的连续性是不可能存在的。在空间方面，康德的观点更接近于“绝对空间”——这与莱布尼茨的观点相左。这是一种非物质性的空间，但它将抽象的概念与我们的感觉相联系。康德指出，无论是构建一个“有穷宇宙”还是“无穷宇宙”，在逻辑上都不可能没有悖论。这个问题究竟有没有意义？讨论它是否合理？

康德试图调和物理与形而上学。对空间的分析是恰当的，但不完整，因为这种分析建立在当时的一些假设之上——非欧几里得空间那时还未被认知，比如，“有穷”即意味着“边界”，而“无穷”则意味着“边界的消失”。但在19世纪中叶，几个大胆的几何学家，如高斯、波尔约、罗巴切夫斯基和黎曼，发现了崭新的“非欧几何”。他们证明了，欧氏几何学的“正确性”只是表面上看似正确，其实并不具有普遍性，因为这种正确性完全依赖于无法被证明的欧几里得第五公理：过直线外一点，有且只有一条直线与已知直线相平行。如果对这条公理进行修改，会导致什么结果？如果我们假设，比如说，过这点有无数条直线与已知直线平行（罗巴切夫斯基的空间理论），或者没有直线与已知直线平行（黎曼的空间理论），新理论会不会缺乏连贯性？绝对不会：在新公理基础上建立起来的几何和欧氏几何一样很有条理。单纯从逻辑角度来看，欧氏几何失去了优势地位，相对其他系统来说，它变成了一个特殊的理论系统。

尤其在1854年，波恩哈德·黎曼证明了一个失去边界的空间并不一定就是无穷的。黎曼的证明与另一些理论相似，后者证明了地球表面虽然没有边界，却是弯曲而有限的。黎曼给出了一个很特别的非

欧空间——一个三维的超球面：“无穷空间的属性很可能只由经验得来，但是，除了经验之外没有任何其他依据。但空间的无穷性无论如何也不可能是经验的结论；相反，如果我们假设物体独立于空间，并给空间一个确定的曲率，一旦这个曲率的值为正（不论多小），空间就一定是有穷的。沿着最短距离的线条，将本来位于一个表面的基点向着各个方向延伸。我们将会得到一个恒定曲率的无穷空间，即一个三维的平面。这个面将是一个球面，因此它将是个有穷的空间。”

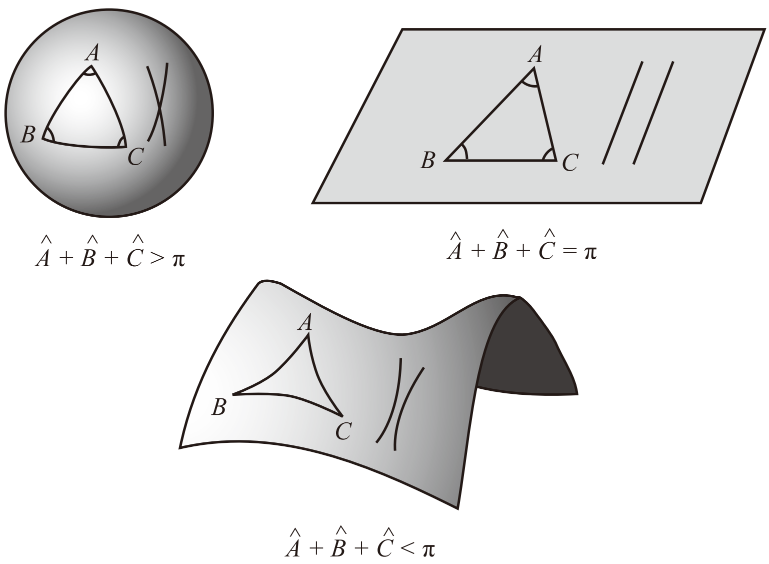


图 1.5　三种曲面

球体的表面有一个正曲率，平面无曲率，马鞍状表面有一个负曲率。在球面上，三角形的内角和大于 180°；在平面上，三角形的内角和正好为 180°；在马鞍状表面上，三角形的内角和小于 180°。三维空间可以像这些表面一样有曲率，但弯曲的形式更多样、更复杂。原则上来说，我们可以通过测量巨大宇宙三角形的内角和来推测宇宙的曲率。

一个弯曲的宇宙?

1900 年，德国天文学家卡尔·史瓦西（1873—1916）发表了一篇论文，但未能引起关注。然而，人们事后发现，其中的观点非常具有前瞻性。史瓦西有着过人的独创精神。在那个时代，只有很少几位天文学家能像他一样掌握前沿数学，深刻理解非欧几何学的精妙。正因如此，史瓦西很自然地自问：真实的宇宙是否不能弯曲？事实上，史瓦西在一系列观察的基础上，寻找一个小于空间曲线半径的边界（欧氏空间对应的是一个无限值）。那时，星云的河外星系属性还没有被证实，关于星体的总体布局，人们普遍认可的模型是将所有可视星划归银河系。人们认为，银河是一个由均一物质构成的小岛，迷失在一片无尽虚空的海洋之中。史瓦西则指出，这个小岛也许可以占据全部空间，只要该空间是有穷的、小而无界限的。黎曼几何也认为有这种可能。史瓦西假设宇宙包含上亿颗恒星，并估算了恒星之间的平均距离。他认为，这种物质占据的空间半径比百万天文单位还大。天文单位即日地距离，也就是 1.5 亿千米。他由此确定了宇宙曲线半径的一个界限：“我们可以在不违背经验的情况下假设，宇宙被包含在一个双曲线空间中，其曲线半径大于 400 万天文单位，或是，宇宙包含在一个椭圆形的有穷空间内，其曲线半径大于一亿个空间单位。”

16 年后，史瓦西在前线的战壕里发现了精确展现黑洞周围扭曲时空的相对论方程的第一个解（见“无底洞”）。

黎曼并没有满足于对抽象空间的思考，他还把自己的发现应用到宇宙学领域。他是第一个提出“有穷无界的宇宙”模型的人。黎曼站在几何学角度，运用“超球”来描述这个模型。

终于，“边界之争”可以解决了。几何意义上的“无穷”不等同于“无界”：我们可以构想一个“无界有穷”，即没有边界的空间，比如球面。界定“无穷”和“无界”，只在欧氏空间内有意义。哲学家对非欧几何的基本研究不甚了解，所以，关于“无穷”的后康德哲学讨论范畴就很有限了。

新的时空

20 世纪初的宇宙学革命，是爱因斯坦的广义相对论的先进理论与众多观察成果结合的产物。

广义相对论颠覆了时间与空间的概念。宇宙不再是一个恒定不变的（欧氏几何）结构，包含着由力引起的现象；它成了一个“可变”时空，数学家们称之为“四维变化”——空间是三维的，时间是第四维，是物质的出现引起了时空的变形。时空变形与“引力”有关，引力已经被纳入“时空曲率”的概念（图 1.6）。在这个概念之下，曲率规定了物质粒子和光线的可能轨迹：轨迹必须符合曲线几何的轮廓线。

相对论的一些基本方程，也称爱因斯坦方程式，描述了宇宙中的物质改变时空几何的方式。相对论也参照了一些比较合理的宇宙模型，对宇宙给出了全面的描述。当然，在所有这些描述宇宙的理论中，仅有部分理论与天文观察结果相符。

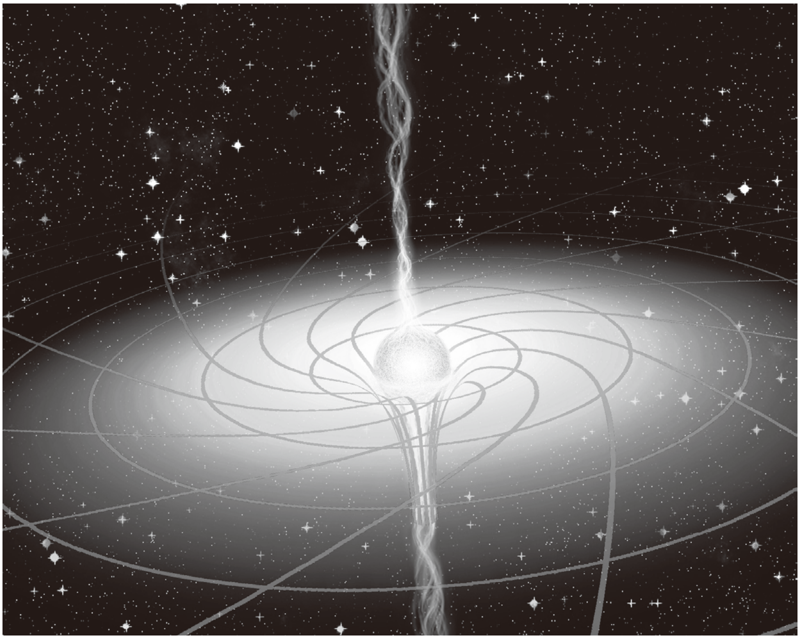


图 1.6 相对论宇宙

广义相对论提供了一个“柔性时空”的新宇宙视角。这个宇宙是由光编织而成的，物质使之弯曲。这种如同艺术家提出的观点，反映出一个旋转的庞大实体对时空结构的影响。并不仅仅是空间会因此发生剧烈扭曲，其几何结构也将沿着实体的旋转方向被拉扯（见彩图）。

图片来源：© Robert Nemiroff (MTU) & Jerry Bonnell (USRA)/ NASA

1917 年，爱因斯坦提出了第一个宇宙相对论模型。其创新之处在于，他为“空间是有穷的还是无穷的”这个问题找到了全新的研究角度。和黎曼一样，爱因斯坦也认为宇宙是有穷——体积与边界是有穷且可以测量的——但无界的。因此，他选择了“超球”来为宇宙的空间建模。

这篇极具开创性的现代宇宙学论文开启了爱因斯坦在新大陆的冒险旅程。实际上，爱因斯坦反对康德著名的实证主义哲学："没有任何观察能够证实纯理论的宇宙学论点，它的观察目标超越了所有可能有的经验。"但这就是爱因斯坦的模型要明确反驳的对象："讨论宇宙在空间上是有穷的还是无穷的，在我看来，这是一个应用几何学的问题。我相信，在不远的未来，天文学家找到这个问题的答案绝不是不可能的。"而且，爱因斯坦干脆地站到了"宇宙在空间上是有穷的"这一方。为了不与马赫关于物体惯性的假说相悖，他说道："我想重申一下，我们可以进一步发展'宇宙有穷'假说的理论依据。广义相对论让我们了解到，物体周边的质量越多，其固有惯性越大。因此，将物体的总惯性作用归结于它与宇宙中其他物体之间的吸引力，这貌似才是最自然的解释。同样，从牛顿开始，重力完全被归结于物体之间的引力。我们可以从广义相对论的方程式中推导出，若将惯性仅解释为物体间引力——正如恩斯特·马赫等人所力推的，这一解释的前提必须是假设宇宙在空间上是无穷的。"

此外，爱因斯坦的模型还提出了"静态宇宙"的假说：在时间的流动中，超球的半径保持不变。事实上，相对论的解完全可以假设一个随时间膨胀或坍塌的宇宙，正如此后俄罗斯物理学家亚历山大·费里德曼在 1922 年到 1924 年间所证明的一样。爱因斯坦的模式让位给动态解，并最终被抛弃。但是，其创新之处一直存留下来——我们完全有可能设想一个"有穷无界"的宇宙。此外，也可能设想一个无穷的空间。因此，相对论将"有穷"还是"无穷"的难题清晰化，把"明确的有穷空间"还是"明确的无穷空间"的选择权抛给宇宙学家。

扩张的宇宙

在相对论引发了概念革命的同时，20 世纪初新技术的发明，特别是美国威尔逊山直径达 2.5 米的天文望远镜投入使用，令天文观察也取得了巨大进步。美国天文学家埃德温·哈勃有幸成为第一个使用该探测器来探索宇宙的人。1924 年，哈勃证实了 NGC 6822 星云位于银河系之外很遥远的地方，这是第一个确定位于银河星系之外的星体。很快，哈勃和合作者证明了所有螺旋形星云都位于银河系之外，其中包括我们的邻居——著名的仙女座星云。这是一些和我们的银河系一样的星系，宇宙由这些星系组成。托马斯·莱特与康德曾假设过的“宇宙岛”通过观测探索得到了证实。物质宇宙似乎突然变大了，从几千光年范畴变成了数千万光年范畴。

除了空间的扩大，第二个重要的观测发现是关于宇宙的时间演变。自 20 世纪初积累下来的数据让人们相信，星系都正在以各自与我们之间的距离成比例的速度远离银河系。这尽管是实验得到的结果，但仍然无法让人理解。直到 20 世纪 30 年代初，科学界才承认了 1927 年由比利时物理学家乔治·勒梅特提出的解：整个空间随时间流逝而膨胀；空间处于扩张之中，并且这种扩张牵引着所有星系。

这是人类跨出的巨大一步。因为自上古时起，天际就被认为是永恒不变的。当然，从文艺复兴时期起，人们承认天际中可能发生了一些新现象。但是，没人敢设想宇宙可能是“整体变化的”。即使是爱因斯坦在构建静态模型时，也被之前的设定蒙蔽了。静态或者是稳定的宇宙学说，曾经在很长时间里根植在人们的思想之中。有

些人仍不能从思想颠覆中平复下来，无法接受从中衍生出的其他理论，如著名的“大爆炸”模型。

在人们的思想中，宇宙不再是孕育着一些宇宙事件的、永恒不变的框架。从今以后，人们认为宇宙是变化着的，而且很难再拒不接受这一理论。继勒梅特之后，物理学家们明白了宇宙变化引发的空间和时间的巨变。

夜之黑，“无穷空间”的第一佯谬

“夜是黑色的”，乍看之下这似乎没什么可让人惊讶的。西沉的太阳不再发出光芒，只有稀疏的星光点缀夜晚。然而让我们设想一下，空间是无穷的，布满了恒星和星系等各种星体。我们望向某个方向，视线之内总会有一个或远或近的星体。星体的光芒理应让夜晚和正午一样明亮，甚至更亮：天空背景如同一个点缀着众多恒星的发光穹顶，犹如一个巨大的太阳。但夜空为什么不是这样明亮的呢？如果说，宇宙中存在其他像我们的恒星一样的星体，所有这些恒星为什么都不会亮过太阳呢？这就是“黑夜佯谬”。为了能更好地理解这个问题，我们将宇宙比作一片森林，恒星是一些同样的树干，彼此相距甚远；离得最近的树干看起来最粗大，离得最远的树干看起来最细小。但显而易见，如果这片森林足够大，树干会重叠交错，连成一片，像一面环形的墙一样将我们包围（图 1.7）。

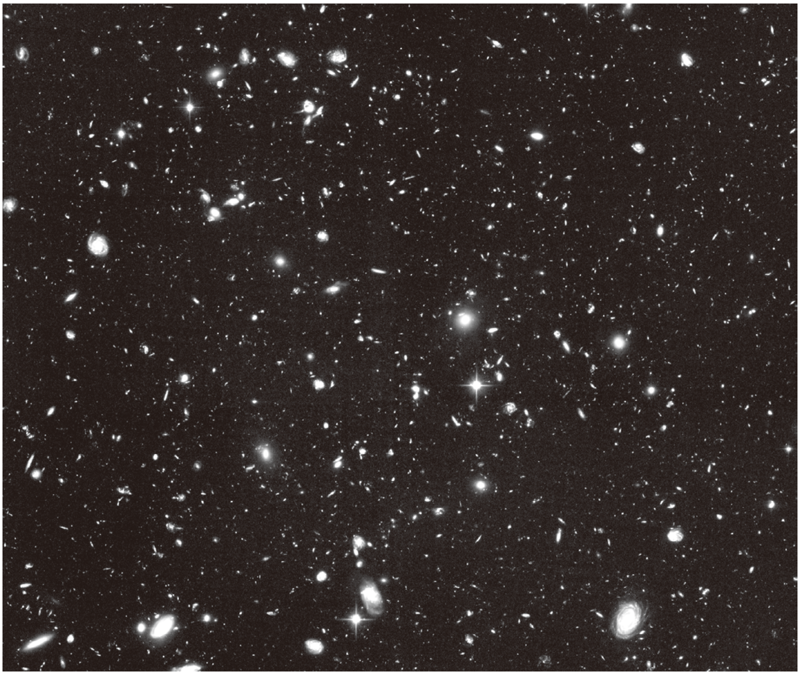


图 1.7　夜空

为何夜空是黑色的，而不是如太阳一样闪耀光芒？这是因为宇宙在膨胀，而这种膨胀仅在有限的时间内发生。遍布苍穹的遥远星系的分布情况或许会告诉我们，空间是否是有限的（见彩图）。
图片来源：© NASA, ESA, S. Beckwith (StScI) & HUDF Team

这个问题起初是由开普勒于 1610 年提出来的。同一年，伽利略发表了《星际信使》，以早期的天文观察为依据，指出了远超人们想象的数量庞大的恒星。表面上，“黑夜佯谬”给“均质无穷空间”概念制造了障碍。布鲁诺认为太阳和其他散布于无穷中的恒星一样。但开普勒不赞成这一观点，于是，他采用了另一种“有限宇宙”模

型来解释这个佯谬。他认为，宇宙被一面墙或者穹顶所包围着。在这种情况下，恒星的数量就不足以覆盖整个天空，那么，夜空就没有理由是闪亮的。

尽管这种解释与“边界说”有相悖之处，开普勒还是从中看到了解释“夜之黑”的唯一的可能性。然而到了 18 世纪，牛顿的“无限空间”理念开始变得根深蒂固，开普勒与其后追随者捍卫的“封闭空间”不再被接受。就是在这种状况下，1721 年，英国著名天文学家埃德蒙·哈雷让“黑夜”的解释重见天日：“如果说恒星的数量是无穷的，那么其盘面组合在一起将会形成一个发光的表面。”稍晚一些，在 1743 年，让 – 菲利普·罗伊·德施索计算出，无论是白天还是夜晚的天空都应该比太阳明亮 90 000 倍。

在 19 世纪初的德国不来梅，一位爱好天文的医生花费许多夜晚，借助安装在自家屋顶的望眼镜观测天空：海因里希·奥伯斯最终发现了小行星智神星和几颗彗星。1823 年，他投入研究宇宙空间的透明色：“如果真的有无数恒星遍布无穷的空间……它们的集合也是无穷的，那么，整个夜空就应该和白昼一样明亮。观察者的视线终点必将会落到某一颗恒星上，因此，天空的每一个点都应向我们射出恒星的光，同时也向我们射出太阳光。”这一次，这种说法终于站住脚了，所以，“黑夜佯谬”有时也被称为“奥伯斯佯谬”。

如何在牛顿宇宙学的框架下回答这个问题呢？有这样几个解决办法。首先，其他恒星真的都和太阳相似吗？答案是肯定的。尽管恒星的体积、质量、强度与颜色都不尽相同，但每一颗恒星的平均值都与太阳具有可比性。特别是，它们的表面亮度几乎是一样的。“奥伯斯佯谬”的解答不可能来源于此。

另一个假说提出，宇宙是由散射性物质填充的，这种物质吸取

了一大部分恒星光。今天，我们知道了星系之间的空间填充着气体与极小的尘埃。但是，这些微粒并不能只吸收光线而不放射出其他物质或其他光线。“黑夜佯谬”也不能就此解答。

于是，我们提出了第三个答案：恒星在宇宙中的分布会不会很特殊？牛顿本人曾设想了一个迷失在一片真空海中的独一无二的星系。在这种情况下，星的数量就可能是有限的，佯谬就迎刃而解了。尽管如此，大家要接受我们的星系处于这种特殊状态下，还是很困难的。在 19 世纪末，卡尔·沙利叶提出宇宙中星体等级分布的理论，引起了关注[①]。这些星体即便是散布在无穷中，这样的等级分布也降低了亮度的叠加结果。但是要解决“黑夜佯谬”，星体必须呈现一种难以置信的布局。今天，天文望远镜已经揭示了宇宙中的可见物质确实呈等级分布，即星、星系、星团和超星系团，但这与沙利叶提出的模型完全不同。

1848 年，美国作家爱伦·坡找到了一种全新的答案。在散文诗《尤里卡》中，他解释道，“夜晚之黑”建立在“过去时间的有限性”的基础之上：“我们的望远镜在各个方向上所发现的尽是虚空，唯一能够解释这些‘空’的方式就是假设这个看不见的后景距我们远得不可思议，甚至没有任何一道光线能够到达我们。”事实上，《怪诞故事集》的作者知道，观察空间的远方就是在观察过去。设想一下，十多亿年前并不存在恒星。光以 300 000 千米每秒的绝对速度散播开来，在 10 亿年的时间里横跨 10 亿光年的距离。我们只能接受到那些有足够时间到达地球的恒星的光，也就是说，发光星体距离我们足够近。因此，即使空间是无穷的，无数恒星在其中随意分布，天空也并非全部在发光，因为恒星只在有限的时间内存在。黑夜佯谬

① 实际上，沙利叶预言了现在称为“分形分布”的理论。

就这样解决了。

爱伦·坡先于现代宇宙学研究数十年看出了“夜晚之黑”对于“宇宙在时间上的有穷性”有着重大意义。但是，科学家从来不从诗歌中寻找灵感来构建理论，爱伦·坡的解释在很长一段时间里都被忽视了！

相对论宇宙学和该理论中的“大爆炸”模型与过去几个世纪的模型有着根本不同。相对论宇宙学为“黑夜佯谬”提供了至少三种可能的解决方法，每一种都足以解释其中的矛盾：开普勒早就预见到的空间的有限性，爱伦·坡最先提出了时间的有限性，最后还有宇宙学红移。

解释一，在空间的有限性方面，相对论宇宙学既接受无穷的宇宙模型，也接受有限的宇宙模型。其新意在于，相对论所预测的有限空间不受“边界佯谬”限制。

解释二，在过去时间的有限性方面，一切都令人相信，宇宙从一个有限的时间起，开始处于类似于今天的这种状态。这个时间可以不确切地称为“宇宙的年龄”，大概是 140 亿年。这意味着，在 140 亿年前，还没有出现任何星星。

所以，空间存在一个边界，超出这个边界，我们将接收不到任何光线。这不是一个物理上的藩篱——空间中没有任何边界的标志。我们如同海上的水手，看不到地平线以外的任何东西。因此，这个看不见的边界被称为“宇宙视界”，而这个边界会使夜晚变黑。

相对论宇宙学还提供了第三种可能的解释，其事实基础是“宇宙在膨胀”。空间的膨胀改变了光在宇宙中传播的规律，其效果表现为光的频率的偏移，即星系的红移和能量的减弱。我们完全能接收到来自一个遥远星系的、类似太阳的恒星所发出的光。这颗恒星发

射一些可见光，但我们只能收到红外光：光波的波长偏移向这个低能量的领域。这颗恒星发出的每一个光子到达地球的速度都变得更慢，能量都变得更弱。总之，我们从这颗恒星接收到的光能没有那么强烈，也没有那么高的可见度。将一切因素都计算在内，天空的背景不发光，也就没什么值得惊讶的了。

就这样，相对论宇宙学结合了“解释二”与“解释三”，也许还有“解释一”，完美地解决了“黑夜佯谬”。相对论宇宙学使我们看到了一个看似稀松平常的事实如何连接了宇宙时间、空间结构的最深层理论。

的确，不论是开普勒、奥伯斯还是后继者，都不能否认一个效应：天空的背景似乎是发光的，即使是在晚上——“大爆炸”理论借此彻底改变了“夜之黑”难题。诚然，天空背景的光不像太阳表面那样亮，也不与太阳光在同一波段。但是，根据大爆炸模型，宇宙在 140 亿年前无比炽热，宇宙中的每一个点都和太阳表面一样亮。我们望向各个方向，目光总能落到宇宙过去的某一点上。出于和奥伯斯同样的理由，我们相信，即使所有恒星都消失，我们仍然能被这些来自原始宇宙的惊人“发光体”所包围。

再没有新的矛盾了。我们接收到这种光线，只是它偏向长波，而且减弱了。在 140 亿年前[①]，宇宙曾是一个巨大的发光物体，向四面八方发射出长波可见光。但这种光线发生了红移，与星系的光的性质一样。这种光来自远古时期，所以红移非常大——系数超过 1000，这使得可见光变成了微波。这种古老的电磁光是原始宇宙的遗迹，于 1964 年首次被探测到。现在，我们已经发现了大量这种光

① 根据普朗克探测器在 2015 年发布的最新天文数据来看，更精确地来说应该是 138.1 亿年。

线，称之为“宇宙微波背景辐射”。

夜晚的漆黑与清风让我们知道了宇宙处于膨胀中，其年龄也有可能有限，但它与几十亿年前的状态完全不同了。宇宙以某种方式“演变”着。

到底是有穷，还是无穷？

在弗里德曼和勒梅特的解的框架下，我们不得不提到空间是“有穷”还是“无穷”的问题。这二人的模型忽略了物质（星体、星系……）分布的不规则性，就像地理学家在绘图的第一步就忽略了地表（山脉、河谷……）的不规律性。宇宙各处都拥有相同的属性，即所谓的“同质性”与“各向同性”。空间只有两种特性：一个是曲率，这在空间中是永恒的，但需要确认弯曲的轨迹与密度；另一个就是其拓扑性质。尽管如此，天文学家们曾经长期忽略空间的拓扑性质，把它想象成极为简单的结构，一心只关注宇宙的曲率。我们将在后面看到，当涉及“空间无限性”问题时，这种简化起到了关键作用。

关于曲率，弗里德曼 – 勒梅特模型中有三种可能的空间（图 1.8）。“欧氏空间”是无曲率空间，我们很了解这种空间的性质；“球状空间”，曲率为正；“罗巴切夫斯基空间”，也叫“双曲线空间”，曲率为负（图 1.5）。一个球面空间的外沿是有限的，就像是一维空间里的一个圆圈，或是二维空间中的一个球面。这就是相对论宇宙学的先驱者们——爱因斯坦、德西特、弗里德曼和勒梅特都在最开始选择的空间模型。对于另外两种空间，即欧氏空间与双曲线空间，“有穷”还是“无穷”的特性取决于它们的拓扑性质：在最简单的拓扑关系，即“单连通”或简单称为“连通关系”中，它们是无穷的

（见“宇宙拓扑学”）。如果我们忽略掉拓扑学的精妙之处，“有穷”还是“无穷”这道二选一的难题会带领我们去了解空间的曲率。

广义相对论指出了如何去计算这种曲率。曲率的值由宇宙中的物质与能量决定，主要是空间所包含物质的平均密度与平均能量，以及常数 Λ（有时记作 λ），我们称之为宇宙常数。这个因素有时被解释为一种附加能量，它拥有一种斥力场，能够大规模地抵消物质间的引力。它在局部现象中不起作用，比如太阳系或是银河系，但它能从整体上改变宇宙的几何与动力系统。宇宙常数完全基于数学的形式化，而在物理学上处于一种模棱两可的状态，人们现在还不知道如何诠释它。一些理论学家将之视为量子真空能量的外在表现。（见“空”）

一直到近几个世纪，大部分宇宙学家才提出，这个常数是没有意义的。进行了这第二次简化后（第一次是拓扑简化），空间是“有穷”或“无穷”的性质仅取决于宇宙的平均密度（所有物质混合计算）：平均密度有一个“临界值”，记作 10^{-29} 克每立方厘米，这是一个近似值，取决于宇宙现膨胀率；根据平均密度是否超过临界值，空间曲率为正或为负，即空间为有穷或无穷。为方便起见，宇宙学家将密度参数 Ω 定义为平均密度与临界值的比。于是，根据这个比值是小于、等于或大于 1，对应的空间曲率为负值、0 或正值。这一比值也为我们提供了观察空间宏观几何的通道。

宇宙的时间可以根据两种模式演化：在第一种模式中，膨胀在大幅减慢，宇宙膨胀到一个最大值，然后开始朝反方向缩小，热量终结于宇宙的极端混乱中，这就是“大挤压”。在第二种模式中，膨胀会持续下去，让宇宙不断稀化和冷却。这两种可能理论都基于宇宙物质的平均密度与宇宙常数。

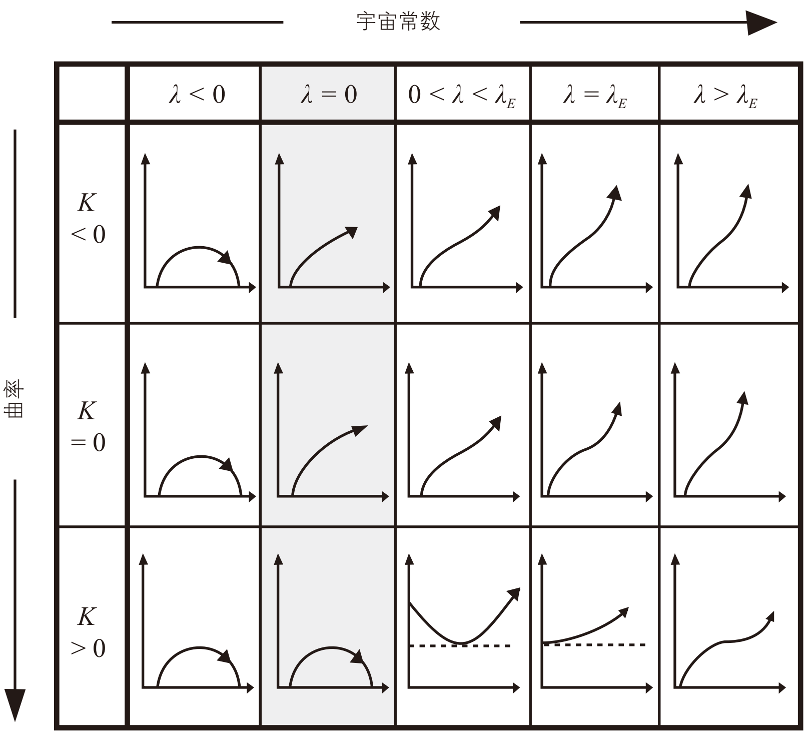


图 1.8　弗里德曼 – 勒梅特宇宙

弗里德曼 – 勒梅特宇宙模型的动力学，即基于宇宙时间的空间指数变化，包含两种值，一是空间曲率 K，另一个是宇宙常数值 Λ（图中记作 λ）。宇宙常数的两个特殊值是 $\Lambda=0$ 和 $\Lambda=\Lambda_E$，其中 Λ_E 是 1917 年由爱因斯坦提出的，目的是为了确保超球宇宙特点的稳定性。当一个正宇宙常数对应一个远距离的斥力运动时，所有拥有大宇宙常数的模型（$\Lambda>\Lambda_E$）在时间中都是“开放式”的，也就是说，宇宙会处于持续性的膨胀中，不论曲率如何。反之，一个负常数 $\Lambda<0$（在物理层面不太可能）将增加实际重力，以致于相关宇宙模型最终都会以塌缩告终。在某些情况中（$K>0$ 并且 $0<\Lambda\leqslant\Lambda_E$），宇宙最初的独特性甚至会消失。弗里德曼 – 勒梅特的所有解答都与大爆炸模型不同。

各种天文观察表明了，“直接可见”的物质的平均密度不超过临界值的百分之一。但是，我们只看到了宇宙物质的一部分，各种证据都在暗示着大量暗物质或黑物质的存在：基本上，对于星系或星团的动态分析结果并不符合仅根据亮物质建立起来的引力计算。从引力作用出发，如果设想存在一些“隐藏”的物质团，就能或多或少解决这个问题。然而，这种隐藏物质团的很大一部分并不是原子性质的（与普通物质相反），因此尽管人们探索了几个世纪，仍无法探测到。这种源于高能量粒子物理学的假说与广义相对论框架完美相容。这种假说引入了大量成形于大爆炸时期的基本粒子，这种粒子能与原子物质互相轻微地影响，故而能触动探测仪。现在，仍有一些天文学家怀疑暗物质的存在——至少在星系层面内，他们通过重述引力规则寻找其他可能的解释。

一直到 1996 年，宇宙中物质（包括暗物质）密度的估算趋向于在 $\Omega_m = 0.1$ 和 $\Omega_m = 0.3$ 之间，以临界值单位记。设定宇宙常数为零，让众多宇宙学家倾向于一个负曲率的空间，一个持续膨胀的无边无际的空间。但是，一些新的结论打破了 20 世纪 90 年代的局面：对遥远星系中的超新星（一些爆炸的恒星）的观测结果表明，宇宙在加速膨胀。2011 年，索尔·帕尔马特、布莱恩·施密特和亚当·里斯因此获得了诺贝尔物理学奖。将观测结论与对远古光线（见“无穷的幻象”）的细微特点的分析相结合，人们得到了额外的限制：物质的密度 Ω_m 参数固定在 0.3 附近。特别是，这些结论与宇宙常数 Λ（斥力）的影响精确吻合——在同样单位级中，该宇宙常数值在 0.7 左右[①]。这两个数值之和非常接近临界值 1，因此空间曲率

① 有些理论学家拒绝承认宇宙常数的存在，更喜欢用一个神秘的概念，即“暗能量”，见“暗能量？”一节。

约为零，而由于斥力物质占优势，故而膨胀在加速（图 1.9）。

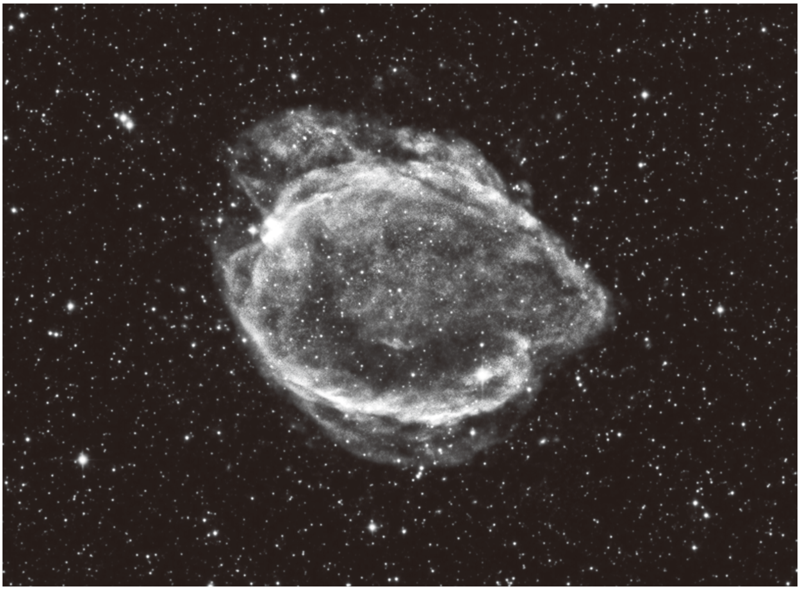


图 1.9 超新星 G299 的爆炸遗迹

这颗 Ia 型超新星[①]是一个双星系统中白矮星热核爆炸的产物。由于 Ia 型超新星的亮度总是很一致，因此我们将之当作“标准灯塔”来观测遥远的空间。多亏了它们，我们证实了宇宙的膨胀在加速中（见彩图）。

图片来源：© NASA/CCC/U.Texas

空间到底是“有穷”还是“无穷”？这个问题向所有人开放。如果未来有结论能证明空间曲率是严格为正的，天平无疑会偏向“有穷”。如果有人能证明空间曲率为负或为零，那么只有考虑拓扑

① 关于超新星的性质与分类，请参阅《黑洞与暗能量：宇宙的命运交响》（人民邮电出版社，2017 年）。——编者按

才能决定空间的“有穷性”或“无穷性”。我们会在“宇宙拓扑学”一节中提到这个问题。

双重生命

有人认为，宇宙的无穷会引发另一个佯谬，其根源可以上溯到 2500 年以前形成的原子学说——多重宇宙与生命无限。一个无穷且同质的空间很可能包含着无数的星系，那么也会有无数的恒星与行星。

很多的研究者设想，生命有可能曾经在银河系或其他星系的另一个行星上出现过。有人甚至自认为能证实生命出现与演化的可能性。但行星的数量太多了，面对无数次机会，即使一个不大可能的事件也该突发多次了。所以生命“应该”在另一个无穷宇宙中也存在。

如果推理是正确的，那么事情就该如此，但“可能性”的概念在这里没有任何可操作性。对于这些预测，我们无法给予任何具体的意义，这通常只是异想天开罢了。今天，我们不可能证明生命（无论和地球上的生命类似与否）在其他地方出现过，但要证明不存在，也是不可能的。

有些人甚至走得更远。在地球上，生命的组成图谱是由脱氧核糖核酸（DNA）控制的。脱氧核糖核酸分子以多样而有限的形式呈现。有人做了一个大胆却缺乏证据的推理，他们想象在一个无穷宇宙中，脱氧核糖核酸的所有可能组成形式都存在。于是他们猜测，至少存在一个行星，那里生活着另一个让－皮埃尔·卢米涅和另一个马克·拉舍兹－雷。他们的遗传结构与我们二人完全一致，所有

的神经元都一模一样。这也就意味着，我们所有的记忆、思想，甚至此时此刻的动作都是一样的！有什么不可能的呢？在那里可能有无数的人正在阅读此书，而我们却不能向他们收取版税。这个“推理”明显完全是骗人的。它说明了“可能性”这个概念是多么需要小心运用，还有，“无穷”的概念会引发多么无限制的幻想。

各种类似的想法使一些人将“空间的无穷”视为各种哲学上不可接受的悖论的来源，或是重新思考“平等”“自由”等概念的契机。但是，这些所谓的悖论更多是一些错误的推理[①]。最典型的就是引入和玩弄一些没有任何证据的“可能性”，这不过为了得出一些结论，避免推导出“空间无穷”的假说。

天体的永恒

路易·奥古斯特·布朗奇这个煽动者对“无穷空间中的双重生命”悖论提出了一个最惊人的表述方法。

布朗奇一生中有三十多年都是在各种监狱中度过的。1871年，他在狱中编写了一本名叫《天体的永恒：天文学假说》的小册子。在小册子中，他描写了一些启发自己提出宇宙无穷假说的哲学思考。他先是断言了物质组合形式的有限性：只存在某种单一体，即原子，所有的物质系统都是由它构成的。尽管原子有无穷种组合，结果却一定是有限的，就像元素一样。因此，“为了要填满永恒”，自然界要无限次重复最初的那些组合。布朗奇从中得出了最不可理喻的逻辑结论：

“天体就这样被划分为原版与翻版。原版就是所有样式独特

① 比如，并不能说一系列无穷对象是可能的，就说它们实际存在。

的星球的集合，翻版就是这一样式的样品或复刻。原版的数量是有限的，而翻版或复制的数量是无限的。每个样式背后都有成群的、不计其数的翻版……因此，每一个地球都容纳着一个特别的人类群体，这些群体是基因不断改变的结果。每一个地球都需要自我复制数十亿次，为的是满足无穷的需要。这样就有了数十亿个地球，它们在人类与物质构成上都绝对相似。无论是时间还是地点，无论是千分之一秒或是一丝蜘蛛网，在这些地球上都相同无差……就这样，在所在星球的庇护之下，每个人都在辽阔空间中拥有无数的复制体，过着一模一样的生活。每个人的复制是无穷的、永恒的，不仅是现在年龄的他，还有各个年龄段的他。同时，每时每秒都有数十亿的复制体出生或死亡，处于从生至死的各个年龄段。”

布朗奇援引了牛顿宇宙学中“空间无穷”与“时间永恒”的概念，认为永恒就是在无穷空间中永不变化地上演同样的内容。

数以亿计的相似地球、千篇一律的复制和所谓的创新思考其实毫无意义，就和提出这些概念、妄想改写历史的那个人一样荒诞。

宇宙视界

在“宇宙拓扑学”一节中，我们将看到布鲁诺在 16 世纪末为了重新考虑“无穷”与“有穷”的关系，以相对视界理论为源头发起了一场认知革命。人类的感官只能感觉到可感知范围内的物体，布鲁诺写道，物体“暴露自己，呈现出一个拥有有穷视界的表象，而

这一表象却总是变化不定的”。在《巨大与无数》（1591）一书中，布鲁诺这样分析了儿时的记忆：“我曾认为在维苏威火山之外别无他物，因为对那时的我来说，要想看到比那座山更远的东西是不可能的。”实际上，视界似乎将可感知世界幽闭在一个环形围墙之中，但通过移动，我们可以超越它。所以，这个视界并不是绝对的。没有真正意义上的“视界”，只有“观察的视界”。视界随着观察者的移动而移动，观察者始终位于自己的感知范围的中央。因而，布鲁诺总结道，环形封闭的感知视界仅源于我们感官投射的有限性，而并不来自真实的宇宙结构。所以从逻辑上，我们可以认为宇宙是无穷的。

相对论宇宙学曾经大幅补充了这一经典的视界理论，尤其区分了两种特别的视界类型。第一种称为“粒子视界”，类似于我们所熟知的概念：视界确定了我们在时空之中的位置——此时此地；在空间中，它构成了我们所能观察到的宇宙的边界。第二种类型不划分空间，而划分事件。一个事件类似于时空中的一个点，有特定的日期与空间位置。据此，我们将之命名为“事件视界”。这是一个绝对边界：它包含了我们所能观察到的所有事件，不论在哪个时期——过去的、现在的与将来的。在这个视界之外，存在着我们无法感知的事件，也就是说，这些事件的光线从未抵达、也永远不会抵达我们。从事件点出发，视界与某个观察者紧密相连，比如“我”，而不是与某个既定时刻的观察者相联系，比如“此刻的我”。

宇宙的膨胀——大体上是其曲率的膨胀——让相对和绝对的视界结构更加复杂，以致于每一个相对论宇宙模型都各自呈现出不同特点的视界形状。一系列示意图有助于理解这种微妙性。我们绘制了一个“时空”图解，来展现宇宙从最初的奇点 S 开始的膨胀史（图 1.10）。笼统来说，这张图通过“光锥”来展现宇宙的因果结构。

一个物质粒子不可能超过光速，也就是说，在 1 秒的时间内，粒子不可能跨过超过 300 000 千米的距离——这是光在 1 秒内跨越的距离。在时空图解中，这一特性表现为物质粒子的宇宙线，即它在时空中的投影。宇宙线必须位于“光锥”的内部。光锥是由光子（光的粒子）的宇宙线产生的。我们能观察到的一个既定时刻的全部宇宙必须位于“过去”的光锥之内。

在图 1.10 中，宇宙的时间线是一条条从 S 点发出的直线。它们（差不多）表示了星系的宇宙线。宇宙线时刻都与空间垂直。在这里看上去，空间缩减为一维，就像一个圆环。今天的空间标为“现在”。我们所经历的“过去”光锥在引力的影响下向 S 点闭合。在某个既定时刻，只有当某个遥远星系的宇宙线切断了那一时刻的过去光锥时，我们才能收到该星系的光线。而这意味着，我们距这个星系的距离——正如我们与所有可见星系的距离——应该比光从大爆炸发生开始所走过的距离要短。这是该星系所发出的光有足够的时间抵达我们的条件。

说到底，B 星系的宇宙线最初与我们的过去光锥相切。实际上，相切发生在遥远的过去：星系还未形成，呈现出一种原始的光团（见“夜之黑，‘无穷空间’的第一佯谬”和图 1.21），聚集在星系 B 中。宇宙线一直延伸至今，精确定义了“粒子视界”的界限。考虑到实际测量到的宇宙参数值（见“到底是有穷，还是无穷?”），粒子视界的半径为 530 亿光年，对应的光子在到达我们之前已经行走了 138 亿年的宇宙时间。

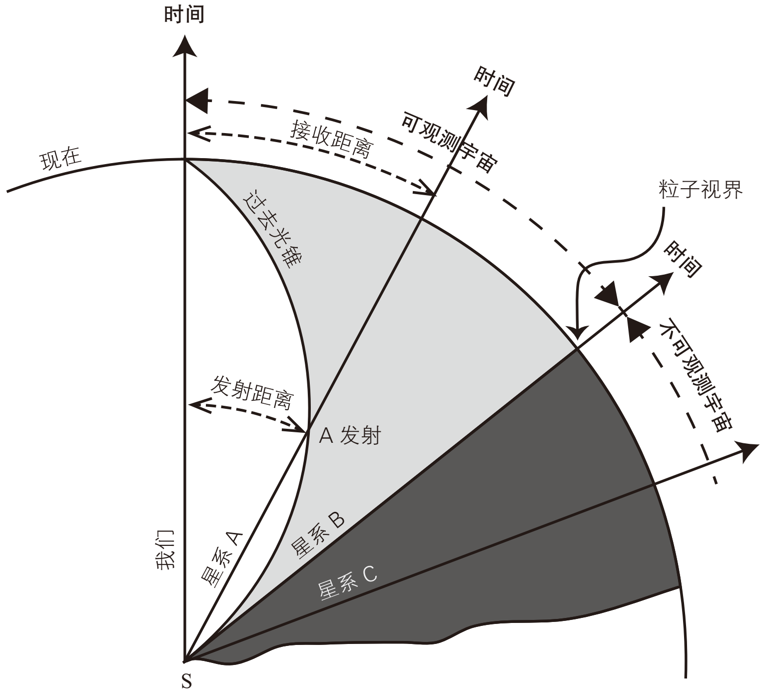


图 1.10　粒子视界

在这个膨胀宇宙的时空图解中，所有星系的宇宙线都诞生于空间膨胀导致的大爆炸（S 点）。宇宙线与我们的过去光锥相交的所有星系，在原则上都是可见的，也就是说，它们的光线有时间抵达我们。正是如此，我们可以观测到星系 A 在过去某个时期的样子（“A 发射”）。在那个时期，星系 A（发射时刻）与我们的距离比现在（接收时刻）的距离要短得多。星系 B 的宇宙线最初曾与我们的过去光锥相切，正好位于视界范围的边界上。它的宇宙线与“现在”空间区域的交点即是我们现在可视区域的边界，也就是粒子视界。超过这个区域（深灰色部分），物体就不可观测，因为其光线没有足够的时间到达我们。

粒子视界在观察者的瞬时空间中被测量（在图中表示为“现在”）。它与光源的空间位置重合，光源的红移应是无穷的。因此，视界大小的增长比宇宙膨胀速度快。比如，有一种弗里德曼－勒梅特模型的特殊算法，称为“爱因斯坦－德西特算法”（在图 1.8 中，灰色格子对应 $K=0$，$\lambda=0$）。在该算法描述的时空中，粒子视界的“衰退速度”是光速的 3 倍！这与相对论毫不对立，因为这里不涉及伴随着信息传递的真实物理移动。图 1.11 很好地展示了粒子视界随时间的增长，这意味着，新的星系可能“回到”我们的视界而变得可见。而且，一旦进入这个视界，它们将再也不能从中出来。

另一种时空图解能让我们更好地理解宇宙视界的深层含义。这是一种“保形”图解，因为图中没有改变光锥的结构，也没有改变其角度（图 1.11）。

在一个没有引力的时空图中，光线总是用呈 45°角的直线表示（假如我们将距离单位定为 300 000 千米，时间单位为 1 秒）。所以，光锥非常像几何学里的圆锥，它的轴总是竖直的。但当引力介入时，时空结构的局部就被物质和能量扭曲，导致光锥倾斜并顺着曲率的方向弯曲，这解释了光在引力场中的偏移。但是，粒子的轨迹仍局限于光锥内部。“保形”图解的几何意义在于“强制”光锥保持竖直，并限定在 45°角的斜线之内，即使有引力介入。这让我们能更清晰地解读宇宙中不同区域的因果关系。因此，光线全部都是竖直的，空间区域全部都是水平的。

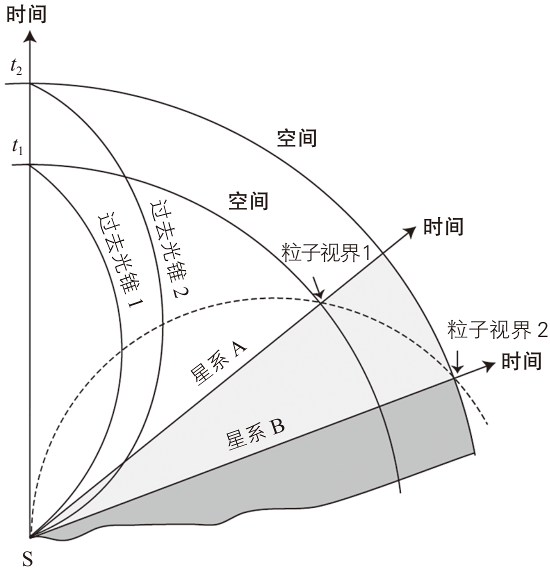


图 1.11　粒子视界的增长

星系 A 位于“现在”的视界范围内（在时间 t_1 处）。我们看到它时会稍微“晚一些”（在时间 t_2 处）。我们的过去光锥将会增大。更远的一个星系 B 将决定粒子视界。粒子视界的范围由视界范围内星系的宇宙线决定，随宇宙时间而增大（点状曲线）。

图 1.12 表现的是弗里德曼 – 勒梅特的“膨胀 – 坍缩”模型下的时空图解（在图 1.8 中，灰色区域中 $K > 0$，$\lambda = 0$）。这个宇宙模型表现的是时间的起点（大爆炸）与终点（大挤压）。但这里的奇点不再是点，而是一些竖直的直线。“终极”的过去光锥——在我们到达时间尽头时变成了我们的光锥——在时空中清晰地划分出两个区域。一个区域包含着曾经可见或将来可见的事件（白色区域和浅灰色区域），另一个区域包含着从不可见的事件（深灰色区域）。所以，这

个“终极”光锥不是别的东西，正是“事件视界”，它在时空中永久定格。

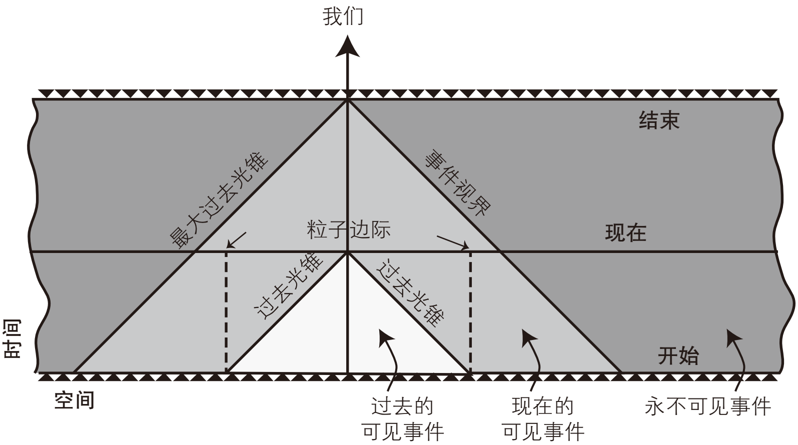


图 1.12　弗里德曼封闭式宇宙的保形图解

在几何学上，保形变换是一种保留角度的变换。弯曲时空的保形图解保留了平直时空光锥的斜角（角度为 45°，如果以光速为单位计算的话）。作为抵偿，时间轴是扭曲的，以便时间线都是平行的。在弗里德曼－勒梅特的封闭模型中，宇宙线的两端被时间奇点——大爆炸与大挤压——切断。过去光锥内部“现在”包含着现在可见与过去可见的事件（白色区域）。当我们抵达时间终点时（浅灰色区域），“终极”过去光锥里包含着的事件就会变得可见。永不可见的事件位于外部（深灰色区域），因为其光线在宇宙终结时都未能有时间抵达我们。所以，终极光锥即为事件视界，在时空中永久定格。

我们就此明白了，粒子视界的存在与“时间起点”相关：如果不存在时间起点，无论距离多远的任何物体的光都有时间抵达我们。然而，事件视界的存在则与“时间终点”相关：一些遥远物体的光

线永远没有时间抵达我们。

图 1.13 是弗里德曼 – 勒梅特持续性膨胀的“开放式”模型的保形图解（图 1.8 中，所有区域 $K \geqslant 0$，$\lambda \geqslant 0$）。该图很好地表现了粒子视界，但没有表现出事件视界：时间在这种模型里只有起点没有终点。

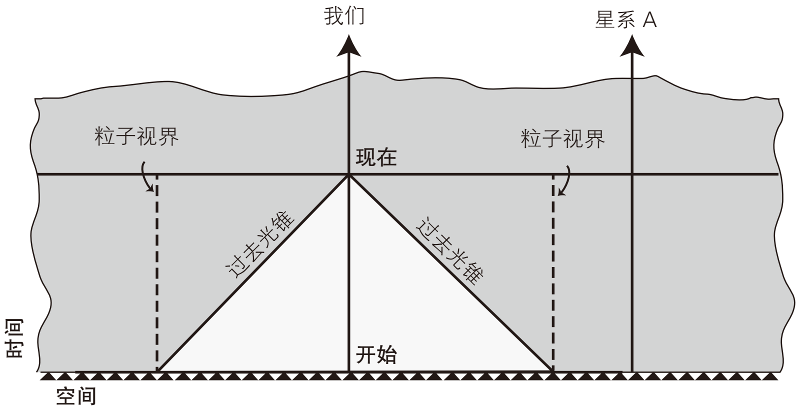


图 1.13　弗里德曼开放式宇宙的保形图解

在弗里德曼的持续膨胀模型中，宇宙的时间线只有起点没有终点。因此在每一个时刻，都只存在粒子视界而不存在事件视界。所有物体不论多么遥远，其光线总有足够的时间抵达我们。

爱因斯坦的静态宇宙时空图解既没有粒子视界也没有事件视界，时空过去与未来的时间都是无限的（图 1.14）。在理论上，这样的图解可以让我们有一个宏观的整体认识。要注意，在弗里德曼的无限膨胀宇宙中，粒子视界以光速扩张。但是，如果我们能等待足够长的时间，也能认识到整体。

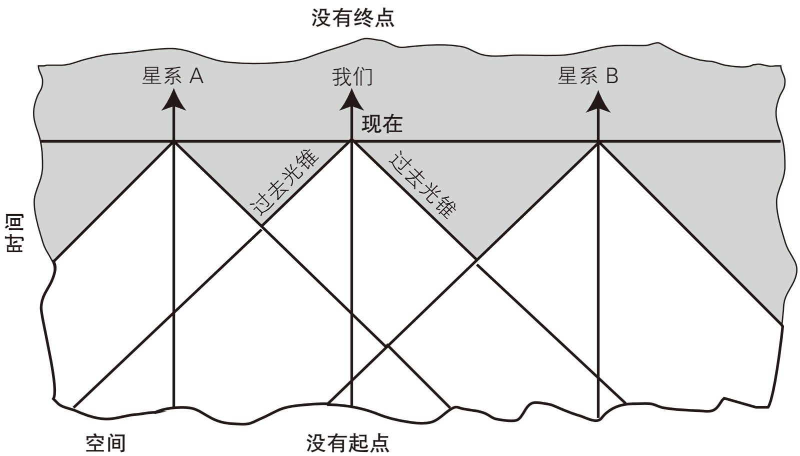


图 1.14　爱因斯坦的保形图解

时间线是无穷的，这呈现的是爱因斯坦的静态宇宙与闵可夫斯基的平坦时空模型。所有星系的线条总会与我们的过去光锥相交。由于该系统中没有奇点也没有边界，因而这些宇宙模型（必须不是单一的）能给我们一个宏观的整体宇宙观。

■ 视界佯谬

宇宙视界不是一个简单、有趣的思维游戏，它是爱因斯坦方程式的任何一种可信解必然得出的结果。在 20 世纪 80 年代，视界是对弗里德曼 – 勒梅特经典模型的重大挑战。然而在很多其他方面，这两者其实是一致的。问题在于以下几个方面。

宇宙辐射（今天接收到的辐射温度为 2.7 开尔文）是物质与辐射“退耦”时发射出来的，发生在膨胀（大爆炸）开始后不久，大约 380 000 年。我们能观察到的宇宙辐射来自一个巨大的天球表面——退耦表面，也称作“最后放射”表面，它位于相对应的空间区域内，

换言之，位于“那个时期”的空间中。但在退耦表面上，存在一些相距足够远的点，它们的过去光锥互不相交（图 1.15）。换言之，这些点之间**从未有任何因果联系**：自宇宙伊始，不论是粒子、光线还是引力波都没有任何时间抵达彼此。我们可以把这个表面划分为大概 1000 个互相独立的“单位”。我们所观察到的宇宙射线各向同性，这意味着所有这些单位都确实拥有自己的物理特性，而在它们的过去中，这些特性从未互相影响！这就是所谓的“视界佯谬”。

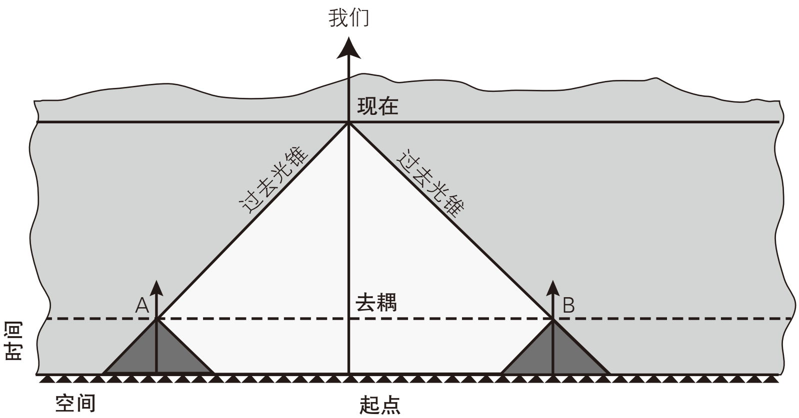


图 1.15　弗里德曼宇宙模型中的视界佯谬

只有在大爆炸后 380 000 年的退耦期，宇宙才对电磁射线变得透明。就是从退耦面上，发射出了宇宙微波背景辐射。这个辐射是绝对各向同性的：在退耦面上，A 和 B 之间所有点的温度均相等（大概 10^{-5} 开尔文）。但是，A 和 B 的过去光锥没有相互切断，因为它们过早地被原始奇点切断了。如果 A 和 B 在过去从未互相影响，那就很难明白为什么它们的温度相同。有些人认为，这个佯谬对弗里德曼 – 勒梅特用来解释宇宙整个历史的经典模型提出了异议。

为了回答这个问题，我们可以假设，不论上溯到多久之前，宇宙在空间上曾经总是同质的。但是，宇宙学家和生物学家一样，更倾向于认为宇宙如今的特性是一系列演变过程的结果。在这种情况下，我们可以反向想象，从一个混沌的原始宇宙（没有任何对称性）开始，宇宙在发生了一系列物理变化后变成了我们今天看到的样子。

在 20 世纪 60 年代末，查尔斯·米斯奈发展了一个有趣的原始混沌宇宙模型——“搅拌机”（mixmaster）。这个模型建立在对爱因斯坦方程式某些宇宙解的表现的研究之上。这些解在空间上是同质的，而不是各向同性的，它们被称为“比安奇模型”。在此之前，几位俄罗斯宇宙学家就特别研究过在空间上是封闭的模型，比如别林斯基、哈拉尼科夫和利普希茨——人们称此三人为 BKL！他们证明了宇宙一个有趣的特性。朝着奇点方向回溯时间，宇宙接连经历了不同形态阶段：有时，宇宙在一个方向上是扁平的，而在其他两个方向上延伸（煎饼阶段）；有时，宇宙在两个方向上都是扁平的，而在一个方向上延伸（雪茄阶段）。这样的起伏变化在各个方向上引起物质混合，混合以光速完成。这一过程可能曾经消除了所有的粒子视界——宇宙中的所有区域可能曾在某个时刻彼此相连，或者发生过一次大融合。米斯奈证明了爱因斯坦相对论方程一个广义上的解——这个解可能不仅是各向异性的，而且还是不均匀的，它在奇点附近的表现与 BKL 模型一致。然而，简明而优雅的“搅拌机”理论被指出是不存在的。BKL 宇宙模型的运行方式并非不对称宇宙的一般运行方式，不仅如此，即使是一个最初同质且各向异性的宇宙，随着时间的流逝，它也不会趋于各向同性。实际上，从奇点开始至今所发生的起伏变动很有限，所以，这单纯是因为没有时间发生而

已。此外，我们知道真实的宇宙在去耦阶段之前就应该是同质且各向同性的——早在大爆炸发生之后几秒，即在氦生成的时刻就是如此了。这就是上溯至远古之前的混沌宇宙学！

有人借助高能物理学上的发展，为视界佯谬提出了另一种解答——原始暴胀模型。我们之后会简短地解释（见“量子引力与离散时空”），所以这里只说一说视界佯谬的解决方法。这些模型预言，在宇宙之初的一个极短阶段内（在 10^{-35} 到 10^{-32} 秒之间），膨胀随时间呈指数阶快速发展。暴胀期时长极短，大约持续了 10^{-32} 秒，却似乎足以构建起今天可见宇宙各区域之间的所有因果联系（图 1.16）。在暴胀期末，宇宙应该处于一种与弗里德曼 – 勒梅特的零曲率空间模型极其相似的状态。这时，很可能出现多个迥然不同的“宇宙泡”，而我们处于其中一个同质且各向同性的宇宙泡中。所有宇宙泡加起来组成一个完全混沌、更巨大的宇宙（见“从宇宙到多重宇宙”）。

原始暴胀模型非常有吸引力。它们建立在一些很早以前就确立的粒子物理学假说的基础之上，让我们对亚原子物质的认知向前迈进了一大步（见“重正化物质”）。其他类似的预言，比如单极磁的存在与质子的分解，都随着天文探索与观察的进步而逐一被宣告无效。原始暴胀理论中最明显的矛盾在 20 世纪 80 年代被修正。人们为此引入了一些可随意调整的参数，让模型中被质疑的部分消失了，却严重违背了“简单原则”。

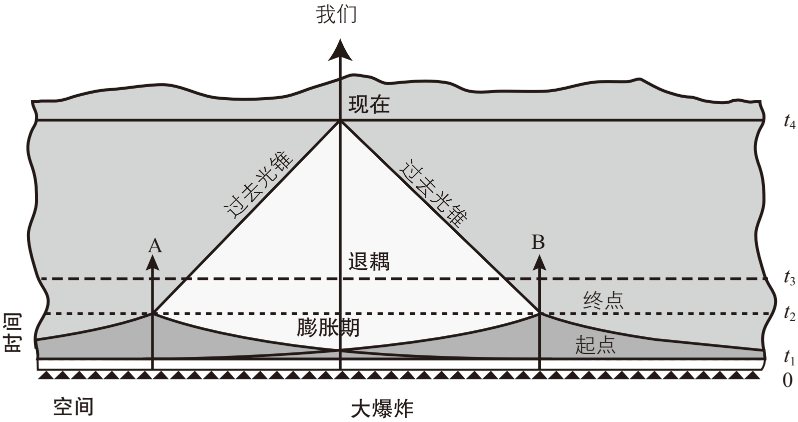


图 1.16　视界与膨胀

将某些源于粒子物理学与量子场论的理念应用在原始宇宙学上，可以帮助我们解答视界佯谬。宇宙可能经历过一个“暴胀期”，时间为 $t_1 \sim 10^{-35}$ 秒和 $t_2 \sim 10^{-32}$ 秒：其膨胀速度应该是持续且呈指数阶的。这一阶段或许让可见宇宙中所有区域，即我们的过去光锥所包含的一切内容，都发生了因果联系。在 $t_3 \sim 380\,000$ 年时期退耦表面上的每个点在过去都可能互相影响过，这种现象让它们变得同质，而且获得了相同的温度。应该注意到，这个图解中运用的呈现方式并不是严格保形的。

宇宙拓扑学

“标准”相对论宇宙学没有在大尺度上完整描述空间形状。宇宙究竟是有穷的还是无穷的？定向的还是不定向的？是否存在“洞”或是“手柄”？引力并不是唯一的决定因素。空间的形状还取决于宇宙拓扑学。

拓扑（topology 直译是地志学）是几何学的一个分支，它首次对空间进行了分类。标准宇宙学模型默认空间具有最简单的拓扑结

构，即单连通结构。

根据曲率是正值、负值还是零，我们将空间划分为三大种类。每一个种类又根据“拓扑类别”进行了细分。依照定义，同一类空间可以持续地从一种形态变成另一种形态，既没有断面，也没有裂缝。比如在二维空间，一个球体表面与任何一个封闭球体的表面都拥有相同的拓扑结构（属于同一类别）。但是，平面与球体表面的拓扑结构是不同的，因为没有任何一种持续变形可以让平面变成球体。

为了让拓扑学变得更直观，我们设想一个常规的欧几里得平面：一张二维的、无穷的纸——我们经常在三维空间内想象这一平面。在 y 方向上切割一条“长度”无穷长条，在与之垂直的 x 方向上切割一条宽度为 L 的长条；然后，将长条无穷的两端合并（重新粘合）：我们得到一个圆柱体（图 1.17a 和图 1.17b）。然而，欧氏几何学在圆柱体表面和在原平面上都是可证的。所以，圆柱体表面也是欧氏表面，也就是说，曲率为零。不过，它与平面还是有本质上的区别：圆柱体表面在 x 方向上是有限的，但这一性质属于拓扑学范畴，而不是曲率范畴。如果将平面切割，然后在某些点将其粘合，我们并没有改变其局部形状（曲率），却从根本上改变了其整体形状（拓扑）。

让我们走得更远一些：将长度有限的管状圆柱体切割，然后将环状两端粘合。我们会得到一个扁环（图 1.17c）——一个零曲率的欧几里得表面，但在各向上都是有穷的。一只小虫寄居在扁环表面上或常规平面上不会感到有何区别，除非它开始移动位置，绕环一周。

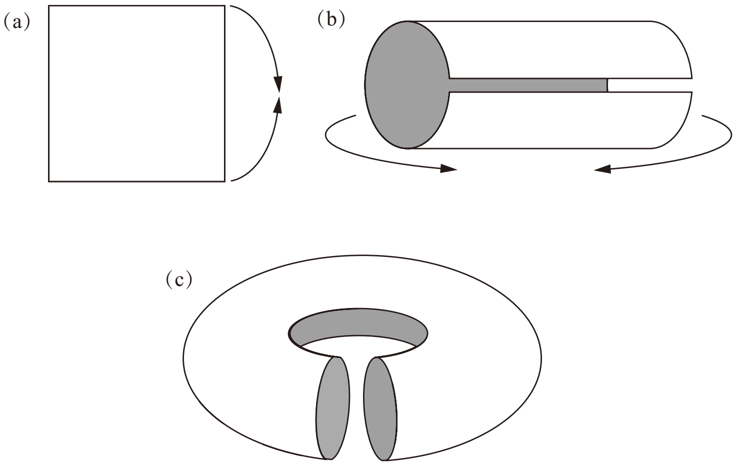


图 1.17　圆柱与环的拓扑

如果在一个平面中切割一个矩形（a），然后将其两端粘合，就可以得到一个圆柱（b）。如果将圆柱两端粘合（依图中箭头方向），就可以得到一个封闭表面，即一个环（c）。这个表面是有穷的，并且没有边界。同样，我们可以设想一些从欧氏空间演变而来的有穷无边的空间。

一张简单的纸就可以做出三种拓扑不同却同属零曲率家族的表面（同类表面不止这三种而已）。因此，三种曲率能演变出三种不同类的面。

- 第一类包括所有欧几里得式表面，曲率为零：平面、圆柱、刚刚构建的环，还有莫比乌斯环和克莱因瓶。
- 第二类是球类，如球体表面一样是正曲率。这一类只存在两种形状：严格意义上的球体与“投射平面”（很难具体呈现）。
- 第三类是双曲类，曲率为负，例如马鞍的某些部分。双曲面

有无数种。只需在一个平面上捅出一些洞，或者给双曲面增加一些“手柄”，就又会产生出新的双曲面！比如，普罗旺斯香草面包或是椒盐卷饼的表面是双曲面。荷兰艺术家莫里茨·柯内里斯·埃舍尔（1898—1972）一生花费了大量时间创作令人费解的版画，在其中呈现那些稀奇古怪的空间（图 1.18）。



图 1.18　埃舍尔的版画

埃舍尔的《天使与魔鬼》从罗巴切夫斯基的双曲面中获得了独特的灵感。画中采用的是一种通过投射效应，在圆周中呈现出无穷空间的效果，透视效果让重复图形变得无穷小。

图片来源：© Escher/Cordon Art. Baarn. Hollande. DR

同样的操作可以应用在“整个空间”内。针对三维空间分类，数学家们发现了一些奇妙的形状。通常，这些知识被局限数学圈内，然而现在却可以用来描述真实的宇宙。和表面一样，空间也根据其

曲率为正、负或零被划分为三大类——球体、欧几里得式与双曲率式[①]。

比如，我们证实欧几里得式类（零曲率）包含 18 种不同拓扑结构空间。最简单的就是“普通”的无穷欧氏空间，我们在学校里学到过它的各种特点。但另有 10 种欧氏空间都是完美的有穷空间！比如超曲面，它将曲面扩展到三维领域，可被视作一个立方体的内部，而该立方体两两相对的面可看作是同样的：我们从一个面出去，就能直接从对立面回来。从某种角度来说，这就是电子游戏的世界。这样一个空间是有穷的，尽管它既没有曲率，也没有边界。

负曲率类包含无数种孔，有的是闭合的（有穷的），另一些是开放的（无穷的）。宇宙学家关心的是，即便曲率为负或者为零，即便物质密度与宇宙常数很薄弱，宇宙空间仍可以是有穷的。

最后，正曲率类也包含无数的空间：在丰富多样的（单连通）超球面拓扑中，“透镜状”空间、“棱镜状”空间、“多面体”空间……都是有穷且无边的。

弗里德曼–勒梅特的“标准”模型假设空间拓扑是单连通的。但是，没人能保证它们就是如此简单。广义相对论通过爱因斯坦公式仅限定了局部的几何特征，也就是曲率。这让我们构建出一些有穷或无穷的宇宙解，这些解与其曲率无关，有时表现为一些极其繁琐的形状。

多面体是由多边形围成的立体图形，多边形的公共边构成棱，

① 遗憾的是，我们没能力形象化表现这种曲率。实际上，我们只能从外部估算表面曲率，将其表现在三维空间中。在更广泛的四维空间中也不可能表现曲面空间。我们只能用数学定义来表现它，这十分精确，而且可操作。

公共点是顶点。通常来说，典型的非单连通（即多连通）三维空间是一个凸形多面体，其中可以找到成对的面。比如说，一个十二面体的面两两成对，我们以它为基础，借助双曲变形来构建一个封闭的双曲空间。多面体内部空间的每一个顶点都是负曲率的；但正像欧氏多面体一样，多面体的体积是有限的，没有任何一条“直线”是无限延长的。

因此，应当排除一个错误观点——尽管相对论宇宙学教材中经常提及：为了弄清楚空间是有穷的还是无穷的，只知道整体密度参数是否超过标准值是不够的；我们还需要做一些附加的假设——准确地说是一些拓扑假设。

宇宙拓扑学双父

早在相对论宇宙学诞生之前，德国天文学家卡尔·史瓦西就已在其 1900 年所著论文的文末附言中展露了惊人的拓扑直觉。我们在“宇宙曲线中的宇宙岛”一节中曾提到过这篇著作：“请想象一下，在进行了一系列深入的天文学观察之后，整个宇宙在我们看来是由大量与银河系类似的‘复制品’构成。无穷的空间已被证实可以划分成一个个立方体，每个立方体都包含着和我们的银河系一模一样的翻版。我们是否真的可以相信，同样一个世界可以被无穷次复制？要想认识到这种想法的荒谬性，只需要想象一下，在这些条件下，我们自己作为观察者，有可能存在无数个自身的翻版。还有另一种想法，现实空间具有特殊的连通性，如果我们从这些立方体的某一端出去，就会直接从相对的另一面返回。认为翻版、复制是个幻想，远比接受现实空间具有特殊的连通性要简单得多。”

以上是对超曲面空间的描述。根据空间的特殊拓扑结构，史瓦西假设螺旋星云不过是银河系的幻影——当时，螺旋状星云还没有被认定是银河系之外的独立星系。史瓦西也是数学研究领域中的天文学妙想家之一。自奠基者黎曼的研究起，19 世纪的数学家其实已经开始探索一些体积有穷却没有边界的空间模型。其中，超曲面由一个欧氏空间中的平行六面体自体连通后构成，物体穿过某一面后，会重新从其对立面的某个点再出现。但在所有人看来，这个封闭空间纯粹是抽象的，和物理空间没有任何关系。

1924 年，亚历山大·弗里德曼在广义相对论的框架下革新了拓扑问题。他明确指出了建立在爱因斯坦理论基础上的宇宙理论的根本性局限。他写道："由于缺少补充的假说，爱因斯坦的宇宙方程解决不了宇宙的有限性问题。"他专心研究一个问题：如果确认空间之间的点——在拓扑学中，这意味着空间是多连通的——空间如何能变成有限的？他还隐约发现，这种可能性催生了"幽灵"的诞生：同一个真实的点可以有多个图像。他补充道，"一个正曲率空间永远是有穷的"，但数学知识无法"解决负曲率空间的有穷问题"。

无穷的幻象

在单连通空间，比如欧氏空间，任意两点只能由一条测地线（等同于弯曲空间中的一条直线）连接。相反，在多连通空间，比如超曲空间，两点之间可以有无数条测地线将它们连接。这个特性让

测地线在宇宙学上具有一个特殊性质，前提是光线准确地沿时空中的测地线传播。

当观察一个遥远的星系时，我们习惯性认为在一个既定方向上和一个既定距离中，只能看见一种图像。然而，在多连通宇宙空间，光线的重叠让我们能看到多种图像。我们可能会进入一幅巨大的光学幻象之中，它将向我们展示比真实情况要广袤得多的宇宙图景。我们可能将同一星系的虚幻复制影像当成遥远星系的“原图”。比如，在一个半径为几十亿光年的双曲空间中，光线可能从大爆炸时刻起已经在宇宙中往返多次。空间“铺展开来”，在我们看来似乎很大，包含十几亿个星系；但实际上，它“折叠起来”可能会变小，只包含数量很少的真实物体。何处是幻境，何处又是真实？

简单的二维宇宙解释了星系 A 中的观察者如何能看到星系 B 的多重图像。这种宇宙模型称为曲面，它是将四边形的对边相粘合而得到的：光线从一边出来能立即在对边上相对应的点上重现。星系 B 的光线可以沿许多轨迹到达星系 A，因此，星系 A 中的观察者能看见来自不同方向的星系 B 图像。尽管曲面空间是有穷的，一个生活在曲面中的人可能会产生一种幻觉，看到一个即便不是无穷（在实际中，视界限制了人们的视线），但至少也比实际更大的空间。这好比以一个“基本单元”为模板，无限地复制，最终得到一个网，而刚才提到的空间就是这个网的一个面。

有时，我们称这种模型为“小宇宙”或者“褶皱宇宙”。如果这个模型与事实相符，“表象”的宇宙将与“物理”的宇宙十分迥异：我们可能会看到一个巨大的宇宙水晶，以一个多面体单元为基础，向着各个方向铺展开来。只有基本单元是“真实的”，也就是说，与物理空间相符。每一个属于基本单元的原始星系都在宇宙水晶中衍

生出众多的幻象，这些图景会在不同方向、不同历史时期被观察到——这就是“拓扑蜃景”。

设想一个6面墙都贴满镜子的房间，包括天花板与地板。一进到房间里，多重反射立即让我们感觉各个方向都是无穷的，我们仿佛被悬挂在一个无底之井上，随时准备在各个方向上被吞没。一个多连通的宇宙空间表面看起来十分巨大，但我们有可能只是被幻象欺骗了（图1.19）。

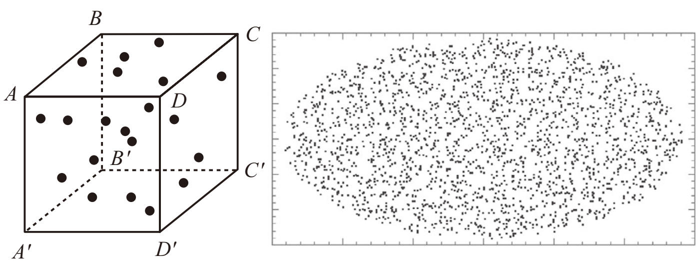


图1.19　多连通宇宙的模拟

宇宙的拓扑结构可能是“多连通”的，但大多数宇宙模型都假设它是“单连通”的。多连通性在宇宙中构建了一些附加通道，让光子通过；而光子让我们看到遥远的星系，并产生了这些星系的多个“幽灵幻象”。
左图中是一个超曲面空间，以一个各对面相等、边长50亿光年的立方体内部来表现。20个星系随机分布在空间中。
右图是对天空外观的数字模拟，将拓扑蜃景的作用考虑在内。每个真实的星系衍生出50个左右的虚幻图像，分布于天穹。在数百个可见图像中，想分辨出真实图像与虚幻图像是不可能的。

所以，一个拓扑蜃景可能会增加光源的图像。天文学家们对“引力蜃景”等效果已经十分熟悉（图1.20）。就是在这种情况下，某

一大质量物体周围的空间曲率增加了来自遥远物体的光线的轨迹。于是，我们在中间物体的方向上看到了重组后的幻象，而中间物体被称为“透镜”。这种幻象就是透镜周围的“局部”空间曲率造成的。

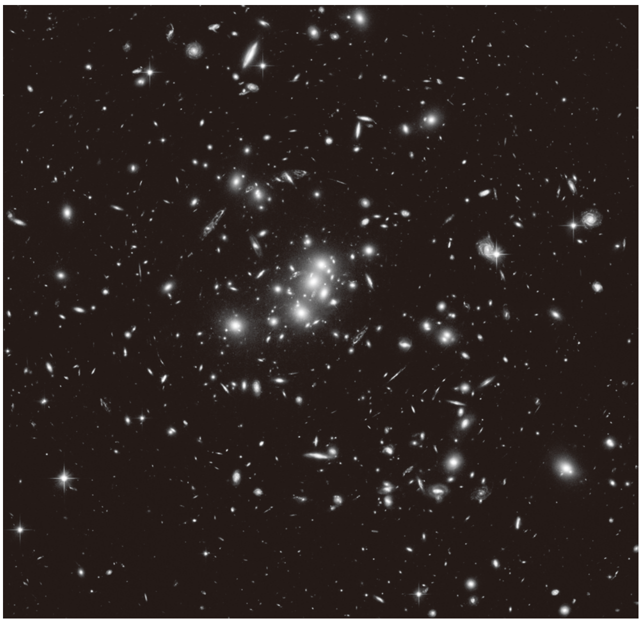


图 1.20　哈勃天文望远镜拍摄到的引力蜃景

在图像中间，星团 C10024+I654 如同重力透镜，让后景（蓝色）上更遥远的星系图像增加了（见彩图）。
图片来源：© NASA,ESA, H.Lee & H.Ford

在拓扑上，这并不是一个特殊物体，但空间本身扮演着透镜的角色，改变了几何结构并让幻象分散于空间各处和各个历史阶段。

这个“整体”幻象让我们不仅可以从各个角度观察物体，而且可以看到它们不同的演变阶段。

空间只能以某种微妙的方式且在大尺度范围内联通，才有可能是多连通的。否则，我们应该早已观察到自己的星系或者其他著名星系的多重幻象。如何才能证实这个说法？如何才能探测宇宙拓扑？全世界诸多团队已经研究出了很多实验方法，来证实“褶皱宇宙”的假说。

人们已经提出两种观察实验，都建立在拓扑蜃景作用之上。第一种实验考察的是分布于空间与时间中的局部光源，如星系、类星体和星团。第二种分析的是宇宙微波背景辐射（见“*夜之黑，‘无穷空间’的第一悖谬*”），该辐射由原始宇宙的热等离子放射出来的，而且只发生在过去的某一时期。所以对我们来说，辐射源头与我们的距离是固定的（图 1.21）。

这两类实验又各自以两种不同参数呈现：第一种参数试图“逐个”辨认同一物体的不同图像，如星系、星团、宇宙微波背景辐射源——等离子区；另一种参数更强大，它忽略了对个体的认知，依靠的是光源位置的统计学分析。比如，“宇宙晶体”试图重复光源在三维分布中的复制情况。对于宇宙微波背景辐射来说，“圆环配对”法可以让多连通空间中的特殊关联更为清晰：在宇宙微波背景辐射图中（图 1.21），一对对圆环沿线的宇宙温度是相同的，由此证明，这是一些从不同方向被观察到的相同的放射点。

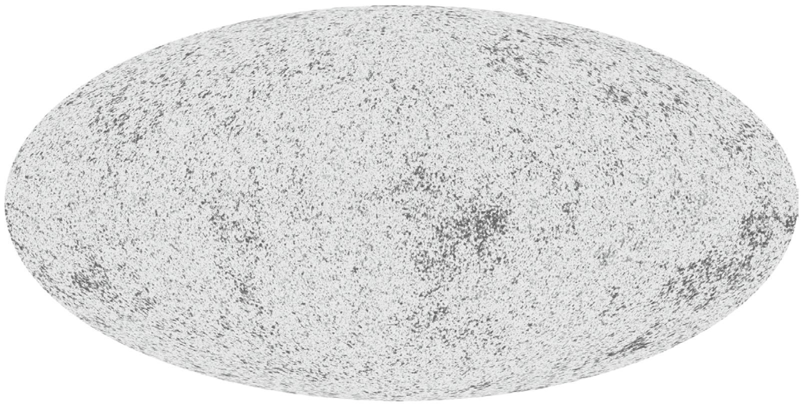


图 1.21　普朗克天文望远镜观察到的原始射线

整个天空表现为微波背景辐射形式，展示了大爆炸 380 000 年后宇宙初期残留的微光。细微的温度起伏用颜色标注出来。而温度涨落与小密度凝结区相符合，当密度压缩时，就产生了原始星系。宇宙的年龄、几何结构、成分甚至未来的命运都写在了凝结区的几何分布中（见彩图）。

图片来源：© ESA-Planck Science Team

2001 年，威尔金森微波各向异性探测器（简称 WMAP，图 1.22）开始详细探测原始辐射的结构，探查宇宙最远古时期的真相。科学家们探索到辐射温度有微小的浮动，获取了大量关于宇宙的信息。

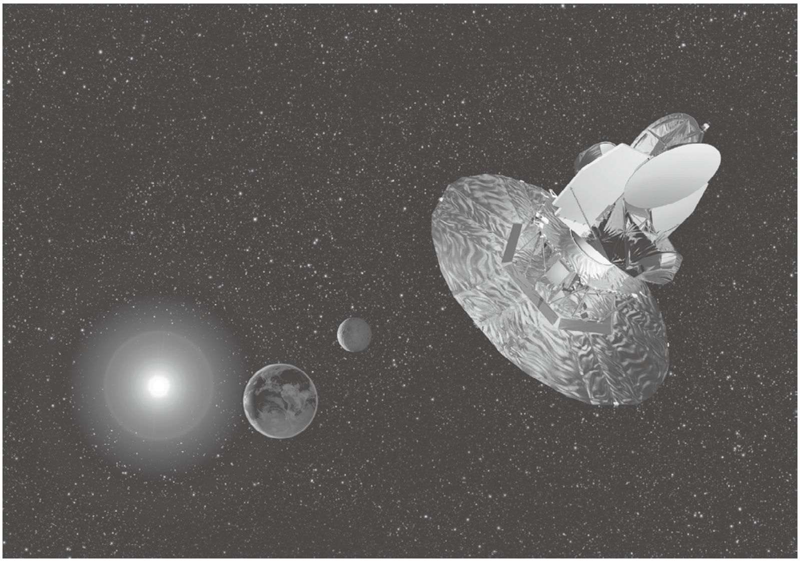


图 1.22　放置在拉格朗日 L_2 点上的 WMAP（见彩图）

图片来源：© NASA-WMAP Science Team

2003 年，WMAP 的首批探测结果发布。为此，论文作者们提出了一种独特的拓扑，称作“庞加莱十二面球体空间”。让我们想象一个十二面体的内部，这是一个规则的多面体，由 12 个五边形构成。然后，假设我们从一个五边形出去，在打了 10 多次转后，就会从相对的五边形面再回到空间内。这一拓扑构成了一个有穷却无边界或限制的空间。一个由多重十二面体砌成的空间如同一个镜宫（图 1.23），让人感到仿佛生活在一个更广阔的空间里。每一次光线的折返都要穿过这一空间的内壁，造成了视觉幻象：同一物体可能有许多图像。

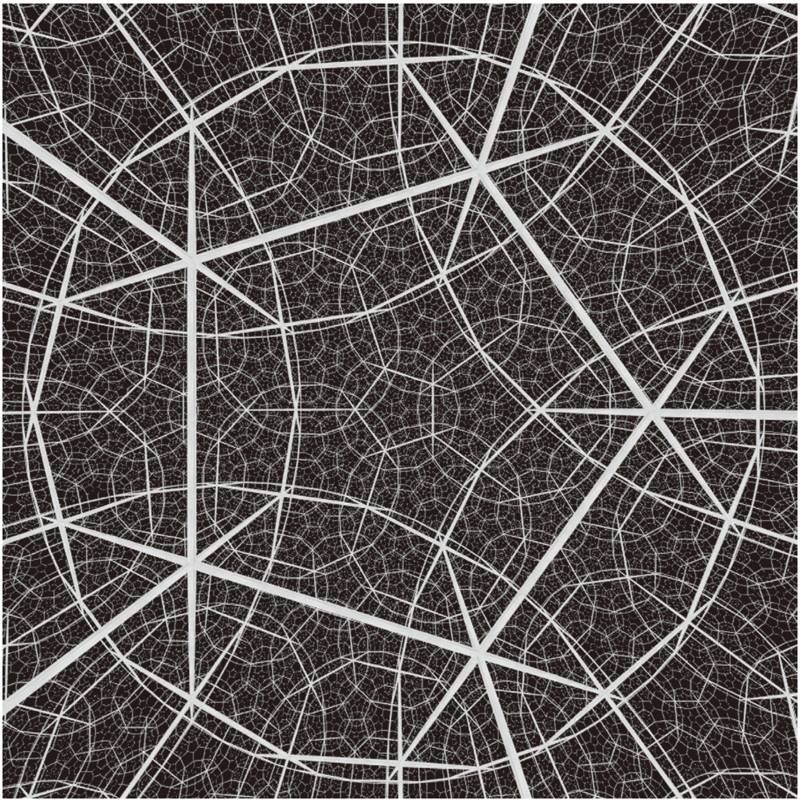


图 1.23　十二面体空间构建的拓扑蜃景

褶皱宇宙的拓扑十分独特，可以将物理空间变为一个多面体。该多面体的多重图像构建了一个表象的世界。如何呈现表面空间结构的问题变成了如何呈现“水晶状”结构的问题，水晶状结构的每个面都是对基本多面体的重现。图中展现的是十二面体多连通双曲空间的表面结构。从内部看，我们会有一种生活在有穷蜂窝状网络中的感觉，这个网络由一些被视觉幻象扭曲了的十二面体砌成（见彩图）。

图片来源：© Jeff Weeks（geometrygames.org/Curved Spaces）

这一模型并不是要替代大爆炸理论，而是另一个特殊视角。在模型中，空间可以是有穷的，其体积是我们能够观察的空间体积的80%。空间可能是正曲率的，就像超球一样，但是体积只是超球的一百二十分之一，并包含数量有限的物质。

2013 年，欧洲普朗克天文望远镜提供了宇宙原始辐射的更精确的数据，因此多连通宇宙模型经历了新的实验性考证。由于没有出现任何清晰的拓扑信号，庞加莱十二面球体空间似乎要被否决了。然而，另一些更复杂的多连通拓扑结构仍有希望胜出。因为如果宇宙足够大，尽管其体积有限，其密度参数 Ω 可以非常接近标准值，所以，我们仍不能将这种拓扑结构与无穷宇宙模型相区别。因此，多连通拓扑的有穷宇宙变得不再可测。

总结

两千多年来，空间无穷性的问题贯穿了宇宙学的历史。希腊哲学家们从前苏格拉底学派的无穷性发展到有穷性，并将物理世界与几何世界等同视之，迈出了走向现代宇宙学的关键的第一步。第二步是在 17 世纪，宇宙学开始向相反方向发展：牛顿构建了从封闭世界到无穷世界之路，将宇宙与欧几里得的无穷空间等同起来。第三步，广义相对论提供了理解宇宙的新视角，宇宙成了被物质扭曲的时空。这一理论依据的是非欧几何，从此以后，有穷空间与无穷空间这两种可能性都出现在同一个模型中。第四步是相对论与拓扑学的发展，让人们在全新的视角下提出宇宙时间与空间的限制问题，重新开启了对“无穷”的争论（图 1.24）。

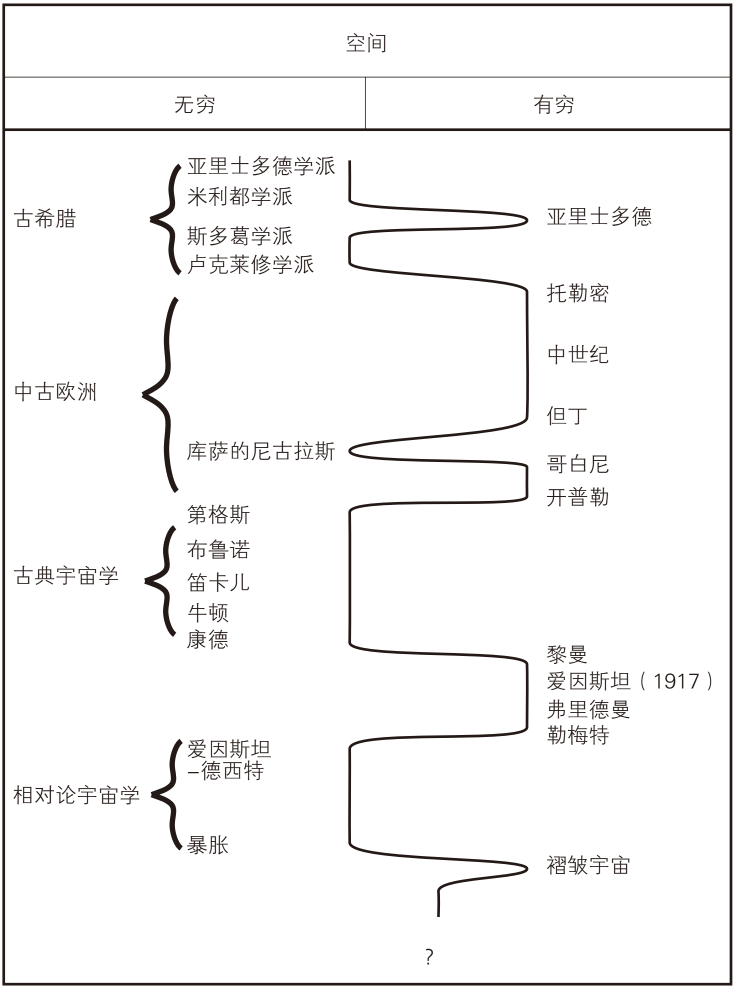


图 1.24　有穷还是无穷？

空间延展理论在各个时期踯躅徘徊，犹如一曲华尔兹，自然而然地要停在一个回旋步上。

第 2 章

数字的无穷

> 相比其他问题，无穷更让人倍感煎熬；相比其他想法，无穷更能刺激、启迪人的理性；但相比其他概念，无穷的概念必须更清晰。
>
> ——大卫 · 希尔伯特

运算中的无穷

亚里士多德驳斥了现实中的无穷，也就是否认了所有物理学上的无穷。但是，他却承认数学上的“潜无穷”，这对于预估一些越来越大或越来越小的量来说，是很有必要的。古希腊几何学最基本的对象是长度。比如说，欧几里得没有借助无尽头的直线，而是长度可任意延伸的线段。所以，这是一种潜无穷——人们使用有限长度的线段，但保留了将其无限延伸的可能性，这就像是一种基于经验的合理推断法。与之相反的观点是现实中的无穷：无限长的直线是真实存在的。这与上述观点有着形而上学的区别。同样，在数字理论上，欧几里得没有宣布存在无限的素数，而是提出“素数的个数比所有已知素数的个数都要多”。于是在很长一段时间里，大部分数

学家都回避“实无穷”问题，而只提潜无穷。

尽管数学家们拒绝明确提出“无穷”的概念，但这并不妨碍他们使用这个概念。比如，普罗克鲁斯（5 世纪）既不承认无穷，也不在实际中使用无穷的概念。他宣称，就算利用无穷的概念，也是为了有穷。无穷存在于想象之中，即使它是无法想象的。普罗克鲁斯将无穷比作黑暗，我们承认它存在，却看不到它。

阿基米德（公元前 287—前 212）在计算半径为 R 的圆面积（也就是 π 值，归根结底，圆面积等于 πR^2）时，采用了几何中的“穷竭法”，完美阐释了当时数学家以无穷解决有穷问题的思想。圆的面积与半径是两个假定存在的量，可用数字测量与检验。根据经验，求圆面积不应涉及无穷。所以，阿基米德也没有利用无穷的概念来计算圆的面积。

古人的方法

为了计算一个圆的面积 S，阿基米德想象出一个镶嵌在圆内的 n 边形，其顶点都位于圆上。只需将这个多边形分解为三角形，就能轻松地计算出它的面积。其面积小于圆面积。接下来，阿基米德设想了多个边数逐渐增多的多边形：n 值越大，多边形越接近圆，多边形始终内接于圆，面积随 n 的增加而增加，但始终小于圆的面积——多边形的面积（当 n 增加时）逐步近似但小于圆的面积。

相反，阿基米德还构建了一些包含圆的多边形，多边形的边都与圆外切。边数越多，多边形的面积越小，但始终大于圆的面积：外切于圆的多边形的面积逐步近似于圆面积，但始终大于圆面积。因此，他得出的圆面积为 $S = \pi R^2$，并将该值计为 π，数值

约为 3.1416。

阿基米德的方法叫作“穷竭法”，建立在微积分计算的基础上；而微积分学在 20 世纪才得到发展（图 2.1）。

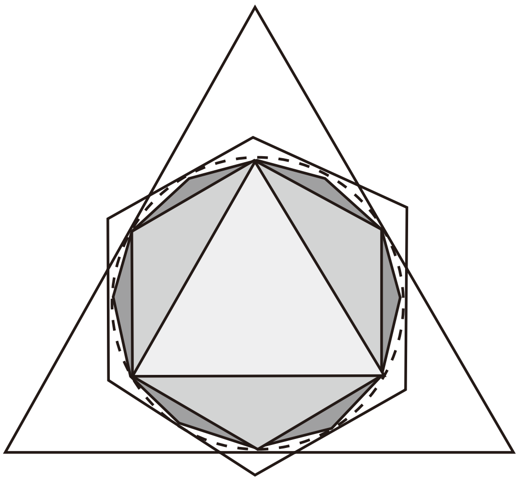


图 2.1　古人测定 π 的方法

为了计算 π 值，阿基米德设想了一些外切于圆和内接于圆的正多边形，并计算多边形之间包含的界限值。

欧多克索斯（公元前 4 世纪）、欧几里得与其他古希腊数学家提出过源于嵌入间隙法类的类似方法。所有人都采用了“无限接近”的想法：准确的结果存在一个测算误差，要想法尽量减小这一误差。在今天的计算机运算中，人们仍在使用这些方法，甚至从中找到了运算的定义（见“连续统假设”）。就像所有人工计算器一样——不

论是机械还是电子计算器，计算机的运算里不存在无穷的概念。计算机也无法达到数学的绝对精确，因为精确就是无穷的分支概念。

阿基米德的推理没有明确提及无穷的概念，也没有涉及边界或收敛问题——不言而喻，这两个问题都预先假定了无穷的概念。然而，他又将圆视为一个有无穷多条边的多边形（无穷多边形）。当代数学家们已经不觉得这种设定有问题了，但在公元前 5 世纪，诡辩者安提丰却曾因提出“当多边形的边数 n 的值足够大时，多边形会变成圆”这一说法而引起了公愤。我们提到过（见“受争议的亚里士多德学派”），在 15 世纪时，库萨的尼古拉斯就已经用同样的论据来证明实无穷的概念。17 世纪末伴随微分计算的诞生，莱布尼茨提出：“无限接近于圆的多边形不是近似于圆而是等于圆。”现代数学家则运用了无穷极限的概念：圆被视为当 n 趋向于无限时的多边形的极限，也就是说，圆的面积就是所有多边形面积的极限值。

不论人们承认与否，无穷是解决众多数学难题必不可少的途径。

超大数

在古希腊，10 000 曾被视为一个十分巨大的数。古希腊人称它为 murias，最终变成了 myriad 一词，意为“无数”。

在《数沙者》一书中，阿基米德重新发展了计数方法，制定了一系列符号来表示任何大数。他的计数可一直到 $10^{800\,000\,000}$，并表示这比“要填满恒星天球所需要的沙粒数”还要大得多——阿基米德认为要填满恒星天球“只”需要 10^{63} 粒沙子。对于我们这位叙拉古的天才来说，这些巨大的数在某种程度上与无穷是一样的，它们是无穷的一种具化。

数沙者

“格朗王，有人认为沙子的数量是无穷的。我所说的沙子，并不单单地指叙拉古附近和西西里岛其余地方的沙子，还包括指地球上所有角落能找到沙子，无论那里有人居住还是无人居住。另一些人虽然承认沙子的数量并不是无穷大的，但他们认为，我们不可能写出一个足够大的数，使它在数量上超过地球上全部沙子所代表的数量。如果想象一个和地球体积同样大的沙体，而且要从地球上的大海和谷底算起，直到最高山峰的高度都填满沙子，这些人恐怕就更加肯定，世界上不可能有如此之大的数，可以用来表示堆积起这一巨大沙体所需要的沙子数量。但是，我将向您证明，通过一系列几何证明——您之后也可以照着做——我命名了一些数字，写在我给宙克西珀的手稿中。其中一些数字不仅超过了以我刚刚描述过的方式填充与地球同等体积物体所需要的沙子的数量，甚至超过了填充与宇宙同等体积所需要的沙子的数量。”

这就是阿基米德所著的《数沙者》的开篇，这本书是最早的也是最好的科普书之一。在那个时代，人们都认为沙子的数量要么是无穷的，要么是多到无法计数的。在此两个世纪以前，古希腊诗人平达就曾写道：“沙子不可计数。”但阿基米德反对这个观点。

大数总是让数学家与物理学家着迷。可观测宇宙中包含的基本粒子的数量级大概在 10^{80} 到 10^{87}。10^{100}（1 后面有 100 个 0）称为“古戈尔”（googol）。著名的搜索引擎公司谷歌（Google）的名字就

来源于此。谷歌搜索引擎可以在不到一秒的时间内搜索几百万个网页。数学家爱弥儿·波莱尔（1871—1956）在 1914 年出版的《巧合》一书中引用了著名的《猴子和打印机》的假说：有一支猴子部队入侵了打字机仓库，变成了打字员，它们打出了“世界上藏书最多的图书馆所存有的所有类型和所有语言的书”。然后，猴子们开始预言：“咱们这支猴子打字员部队就这样一直打字下去，每天准确地打出将要在下一周的某天、在全世界发行的所有出版物、书籍与报纸以及当天所有人要说的话。”让我们以《莎士比亚全集》为例，然后简化一下问题：仅让一只猴子来打字，但打字必须无错误，这只猴子要花多少时间才能打出一整套《莎士比亚全集》来呢？全套书大概有 500 万个字母要打，每篇文章大概需要 6 个月；打字机上大概有 60 个字符（考虑大小写），那么就有 $60^{5\,000\,000}$ 种拼写的可能性，但其中只有一种是正确的；最终，猴子在 10^{107} 年后有机会将这套书全部打出来——这一数字比古戈尔还要大。

1999 年，第 38 个梅森素数被发现了，$2^{6\,972\,593}-1$，这是第一个超过 100 万位的素数（2 098 960 个数字）。任何正式的数学证明中从未使用过的最大数之一是“葛立恒数”。就算将宇宙中的所有物质变为墨水，也不够写下这一十进制数字。于是，这要用到数学家高德纳为记录天文数字所发明的特殊符号。

在 20 世纪 80 年末，多个正式的数学证明中出现了一些比葛立恒数还要大得多的数字。不管怎样，这些庞大无比的“怪物”数字远远没有穷尽……[①]

---

① 关于大数的表达，请参阅《数学也荒唐：20 个脑洞大开的数学趣题》（人民邮电出版社，2017 年）。——编者按

无穷的函数

数学中充满了趋于无穷的函数。比如我们知道的一个例子：如果变量 x 趋于无穷，则函数 x^2 加速趋于无穷，而指数函数 exp（x）则更快趋于无穷。1936 年，阿隆佐·邱奇和阿兰·图灵分别证明了“邱奇–图灵论题”。此后，数学家们在此基础之上证明，存在一个函数 $f(n)$ 比任意一个可计算函数趋于无穷的速度更快。这里“可计算”一词有着明确的意义，它指的是所有可以在计算机上进行的运算。可计算函数包括所有可以用常用数学符号来表示的高阶能量函数、指数函数、阶乘函数等。而函数 $f(n)$ 显然是不可计算的……

无穷的直觉

人们无法设想整数列的尽头，只好试图宣称“数列是无穷的”。数列似乎是无穷的，但这是一种潜无穷。我们能描述得更精确一些吗？能否说出所有整数的数量，并计算它们？圣奥古斯丁认为，上帝且只有上帝才能做到：“神的智慧能够处理所有的无穷，不用心算就可以清点无数的生命。”继他之后经过了漫长的时期，人们“实现”了这种潜无穷：19 世纪，康托尔关于集合的理论和著作终于给无穷下了一个定义，或者说，定义了什么是“基数无穷”（见“无穷的悖论”）。

这时出现了另一个类似问题，与之前的问题略有不同。对于无论哪个数字，似乎总可以给出一个更大的整数，但人们想找到一个“比所有整数都大的数”。如果这个说法是有意义的，这个数只能是

一个无穷数。这样一种无穷可以称为“序数无穷”，与上文提到的“基数无穷”相对。

漫长的历史将数学家们引向了“序数无穷大”与“基数无穷大”，但数学中的无穷还有其他表现形式。我们将在第 3 章讲述无穷小和连续性的问题。在此之前，大家应当先认识到，一些有穷数字的运算需要借助无穷的概念，比如“无理数”问题，也就是不能表示成两个整数之比的数。

■ 无理数

在公元前 6 世纪，受到毕达哥拉斯的影响，古希腊数学家们都认为，所有物理或几何的量都是一个整数或是整数的比值，称为“有理数”。很快，他们意识到自己需要用到一些不同于有理数的数。比如，我们可以用一个数与其自身相乘，得到它的平方；相反的运算可以得到平方根。但是，没有任何一个有理数是 2 的平方根；然而，边长为 1 的正方形的对角线正是这个值，记作 $\sqrt{2}$ 。同样，为了用栅栏圈起一块 2 平方千米大的正方形场地，你要准确计算场地的周长，计算结果是 $4\sqrt{2}$ 千米，这也是个无理数。一个直角边为 1 米和 2 米的直角三角形的斜边长为 $\sqrt{5}$ 米，这也是个无理数。（ $\sqrt{5}-1$ ）/2 的值被用来定义最美的人体比例。传统上，这是分割一段长度的最完美的比例，其定义方法是：较长部分与全长的比值等于较短部分与较长部分的比值——同样是个无理数。事实上，所有无理数与某一非零有理数进行加减乘除运算后得到的仍是无理数。

无理数的发现导致了数学史上第一次危机。其实，在实际应用中，无理数和整数、有理数一样必不可少。然而，无理数的定义、书写表达与无穷的概念有关：没有一个无理数能用有限的小数书写。

要写出一个无理数，需要将它的所有小数罗列出来。然而，这个数列的一个鲜明特点就是无穷性：如果数列是有穷的或是无限循环的，就证明这个数可以被写成两个整数的比，那么这就应当是一个有理数。无穷性的特点只体现在小数的书写中，但是它说明了一个事实：这些数字的确是一个无穷过程的结果。假设我们想确认两个无理数是否相等，那就必须将两个无理数的小数一位一位地比较——这将是一个无止境的工作。所有无理数与非零无理数之间的加减乘除运算结果还是无理数。无理数既是有穷的也是无穷的，这取决于我们的思考角度：从长度角度来说，线段是有穷的；但从构成线段的点的数量角度来说，线段又是无穷的。

尽管无理数的定义涉及无穷，今天，我们对 $\sqrt{2}$ 这样的数仍可以随心所欲地进行运算。我们将这类数定义为一列无穷的有理数极限，或者，如果我们愿意的话，还能将其定义为一个拥有无穷小数的数。构造无理数的无穷性彻底被掩盖，而对我们来说，这些数完全是有限的。

一些小数……

最简单的数字是正整数，如 1、2、3……用 N 来表示正整数集合。对正整数进行减法（与加法相对）运算可以得到负整数 –1、–2、–3……同样，除法（与乘法相对）运算可以得到分数或者有理数，其集合用 Q 表示。所有有理数（也就是分数）可以写成小数的形式。但是，这些小数要么是有限的，比如 5/4 = 1.25，要么是无限循环的，比如 1/9 = 0.111111…是否可以设想一个无限但不循环的小数呢？答案是肯定的。它可以表示成分数吗？答案是否定的。这就是无理数。

■ 超越数

在无理数中，还有一些数具有更复杂的特点——“超越数”，它们不能满足任一个 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ 的整系数代数方程。

π 就是这样的数，它表示了圆的周长与直径之比；此外还有自然对数的底数 e = 2.71828…

莱布尼茨将微积分应用到解答物理学难题中，找到了超越曲线的解，也就是非代数方程的解。这些曲线就像超越数一样是无穷的，莱布尼茨说：“超越量的来源就是无穷。”从对超越曲线和无穷的研究来看，这些曲线作为某些物理计算的解，恰恰印证了一句话：“无穷在自然界中无处不在。”的确，数学中到处都有无穷的影子。否认无穷就得否认 π 和其他无理数：在圆中，在最短的一条线段中，在每个无理数中，都有无穷存在。

■ 序列、级数与集合

序列主要存在于数学与物理学领域，也涉及无穷。以一个元素为基础定义下一个元素的过程，得出了一个序列。如果说，序列最基本的原型是整数数列，我们也可以有偶数数列、质数数列、立方体序列等。这个推导过程是没有终止的，所以序列是无穷的。序列的无穷特性带来的局限之一是，我们不能解决其中所有元素的所有问题。

我们能否将一个无穷序列视为一个完整的对象？至少某些确实可以。比如，我们已经看到每一个无理数都可以定义为某种有理数序列，称为“柯西序列”[①]。我们能像运算其他数一样运算无理数，这

① 我们也可以将一个无理数看作其小数的一个无穷序列。

表示我们至少能运算某些无穷序列。

一旦开始讨论序列，序列极限的问题就来了：序列如果存在极限，它便是一个数；我们在序列中越来越靠近这个极限。事实上，数学家定义了许多种“靠近”，而这又催生了一样多的集合与极限概念。如果存在这样一个极限，那么序列会收敛并趋向于这一极限。上文提到过的无理数可以被定义为某些有理数序列的极限。

数学家和物理学家总想计算一个序列中所有项的无限总和，于是会用到级数。项的数量是无限的，但计算结果可以是有限的；这样一来，级数就是“收敛的”，它给出了有限和无限的集合。要确定级数是收敛的并不容易；如果它是收敛的，计算它的值也很难。一个典型的例子是如下级数：$S = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots + 1/2^n$，很难看出它是否是收敛的。然而，有一种“妙计”可以让我们计算它的值：构建表达式 $S - 1/2 = 1/4 + 1/8 + \cdots = 1/2(1/2 + 1/4 + \cdots) = S/2$；由于等式 $S - 1/2 = S/2$ 成立，其值为解，即 $S = 1$。这并不表明这一级数是收敛的，但当我们证明了其收敛性后，便可以计算它的值。

所谓的调和级数，即 $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots$是发散的。莱昂纳多·欧拉给每一项乘 s 次幂后，给出了一个更广义的相似级数，称之为 ζ 函数（源于希腊字母 zeta）。这就有了 $\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + \cdots$，原始级数符合 $s = 1$，换句话说，第 n 项的值为 $1/n^s$。如果 $s \leqslant 1$，这个级数是发散的；如果 $s > 1$，它就是收敛的。欧拉发现，级数的第一个意义是它与素数紧密相连。但数学家黎曼进一步思考，当 s 变成一个复数（不再是实数）时会发生什么，于是就有了黎曼 ζ 函数，根据不同的 s 值，级数或收敛或发散。重要的是，一种名为“解析延拓”的数学方法可以赋予级数一个值，即便它是发散的。

“黎曼假说”中的这些值被视为数学史上最重要的难题之一。

级数 1 + 1 + 1 + 1 + …自然是发散的，对应黎曼 ζ 函数值 $s = 0$；解析延拓此时为 −1/2。同样，1 + 2 + 3 + 4 + …明显也是发散的，对应黎曼 ζ 函数值 $s = -1$，也就是 −1/12。这样一来，解析延拓以一种惊人的方式赋予了发散级数一个有限值。这并不是把发散级数与有限值相联系的唯一方法，而欧拉（1707—1783）是最早考虑这种可能性的数学家之一。

无穷变为现实

一个概念令一切堕落、错乱。我说的并不是“邪恶”，邪恶只在道德体系内起作用。我指的是“无限”。

——博尔赫斯，《乌龟的变形》

在思想史上，由于自反悖论（reflexivity）的存在，无穷在现实中早已被抛弃。自反悖论与集合的无限大有关：它预见应当存在“与整体相等的部分”。比如，当我们想比较整数集合与偶数集合，或是整数集合与整数平方集合，就会碰到这个问题。

这个奇怪的现象早就被普罗克鲁斯、菲罗帕纳斯和泰比特·伊本·奎拉等人发现了。在 13 世纪，苏格兰方济会数学家邓斯·司各脱（约 1266—1308）设想出两个同心圆，通过圆心的直径将大圆上的点与小圆上的点一一对应起来。因此，小圆和大圆上有着同样多的点，但小圆的圆周要小于大圆。在 17 世纪，一向摒弃无穷的伽利略试图为自己的观点提供一个类似的合理论据。他研究的是整数 n 的平方序列 n^2。伽利略发现，对于任意一个整数 1、2、3、4……我

们都可以给出其平方 1、4、9、16……两个集合都是无穷的，其中每一项都可以一一对应，换言之，两个集合包含相等的元素。但是，平方数只是整数的一部分，于是，这就违背了“整体大于局部的”公理。接受自反悖论是鲁莽的、不理性的！于是，这个悖论困扰了数学家们几个世纪，令他们每次使用无穷概念时都要小心翼翼。有人认为引用“实无穷”这个概念非常危险，甚至令人发指。因此在很长一段时间里，大家宁愿相信只有唯一一个无穷的存在——上帝，才能思考无穷的问题。另外，基督教会也反对人们去思考实无穷。托马斯·阿奎那认为，思考实无穷的人犯下了“傲慢之罪”，因为他试与独一无二、绝对无限的上帝较量。

在中世纪与文艺复兴时期相交之际，几位先驱开始承认现实中存在无穷。罗伯特·格罗斯泰斯特（1170—1253）断言，一个无穷数可能比另一个无穷数大。尼古拉·奥利斯姆（1320—1382）也曾暗示存在多个无穷，他宣称：“每个无穷都不能跟另一个无穷相比较。”格雷戈尔·德·利米尼（1300—1358）强调，上帝不但有可能使用实无穷，甚至有可能使用不相等的无穷。

希尔伯特旅馆

德国著名的数学家大卫·希尔伯特（1862—1943）举出了一个自反性悖论的惊人例子。他假设有一家拥有无数多房间的旅馆，而且所有房间都已经客满。这时来了一位新客人。我们要将他安置在哪里呢？新客人一再要求必须住店，接待员只得将原来 1 号房的客人安置到 2 号房，2 号房的客人安置到 3 号房，以此类推。这样一来，新客人就可以住进 1 号房了。现在再想像一下，停车场来了无数辆客车，下来无数个客人。同样，旅馆接待

员还是可以完美地安置所有客人：他将原先 1 号房的客人安置到 2 号房，2 号房的客人安置到 4 号房，3 号房的客人安置到 6 号房，以此类推。用这种方法，能够腾出二分之一的房间，而且空出来的都是单号房！

与笛卡儿和帕斯卡不同，德 · 丰特奈尔侯爵（1657—1757）希望构建一种合理的无穷，一种经得住理论考验和形而上学挑战的无穷。1727 年，他在《无穷的几何元素》一书中着眼于数学、物理、科学方法和基础研究，将几何上的无穷与形而上学上的无穷加以区分，并提出了“一个像有穷数一样真实存在的无穷数”，启迪了康托尔的研究（见“康托尔的基数无穷”）。虽然无穷的概念远远没有被掌握，但至少看起来是“可掌控、可阐释的，明确甚至构建了数学化的意义，相应地也构建了数学物理的意义”。

与丰特奈尔同时代的数学家莱布尼茨也支持实无穷的概念，他写道：“我非常支持实无穷的概念。人们通常会说自然界排斥无穷，但我坚持无穷无处不在，这是为了更好体现造物主的完美。”但他讲的更多的是逻辑上的无穷，不同于自反悖论中所说的整体上的无穷。

但是，实无穷的捍卫者们仍孤立无援。无穷概念上的难题挫败了大部分的数学家。才华横溢的革命性数学家高斯（1777—1855）如此表达了自己以及他那个时代的数学家们的共同心声：“我发现，我们把无穷当成了‘万金油’，这在数学上是被禁止的；无穷不过是一种表达方式。”

无穷的悖论

捷克哲学家、数学家波尔查诺直面自反悖论，真正打开了通往我们今天所说的无穷之路。1851 年，在波尔查诺去世不久后，他的《无穷的悖论》一书出版了，书中以莱布尼茨的名言作为题铭。

波尔查诺坚定地捍卫了现实中的无穷概念，而不仅仅是潜无穷，跨出了数学史上决定性的一步。实无穷在本体上与其他（有穷）数字一样，数学家们可以对其进行操作，就像处理其他任何数学对象一样。这种无穷涉及集合与量的概念，是一种可量化的对象。它非常正当、合理，与哲学上的可量化无穷不同。波尔查诺希望借此在“数学的领土上”建立无穷的形而上学。他认为：“无穷的集合应被视为完整的总体，而不是没有完结的序列。”

波尔查诺的主要贡献之一是摒弃了无穷的悖论特性：只有把“有穷论”概念套用到无穷身上的时候，才会出现这样的悖论。相反，波尔查诺声称，那些被视为悖论的特性反而应该用于“定义”无穷。因此，他提议利用表面上最矛盾的一个特性——自反性，作为无穷整体性的特点：为了无穷的整体性，必须放弃整体与部分的原则。从前用来否定无穷的论据就这样变成了定义无穷集合的特性！

集合关系指的是“包含在内”，而不能与“小于”关系相混淆，这让自反悖论变得更清晰。平方数包含在整数内，但从整体性来看，两者一样大。如果集合 A 包含在集合 B 内，那么集合 A 不可能比集合 B 大；但是，如果集合 A 和集合 B 都是无穷的，那么二者可以是相等的……在这些条件下，就要用否定的方式去定义有穷，因为有

穷不具备自反性特点。

另一个基本概念是，不仅有“一个”无穷，而是存在“多个”无穷：如果无穷是唯一的，无穷大数将是所有数中最大的，而这是不可能的。波尔查诺认为，多样性是无穷存在的必要条件。由此，人们可以具体设想可量化的无穷，以及如何在无穷中计算。

波尔查诺的想法预示了我们如今习以为常的一些概念，但这些想法仍然有些混乱。后来，经过理查德·戴德金（1831—1916），尤其是格奥尔格·康托尔的整理和研究，这位天才先驱的想法才得以完善。

康托尔的基数无穷

“上帝的最完美之处在于创造无穷集合的可能性，以及驱使他创造无穷集合的无上仁慈。”

——康托尔

■ 可列集

一般来说，一个集合的元素数量，也就是它的大小，被称为集合的“基数”。对于一个有穷集合来说，这没有任何问题。比如，100 个质数集合包含 100 个项，那么该集合的基数就是 100；基数和集合中最大项不同，该集合的最大项为 200。那么，整数集的基数是多少呢？如果我们能够定义这一数字，那么它显然是一个无穷基数。有穷集合的基数是有穷数，相比而言，无穷基数会是一个无穷数。

康托尔的第一步工作就是比较两个集合的基数，这一步建立在

“一一对应”的概念之上：如果一个集合中的所有项都能和另一个集合中的项对应起来，既没有重复也没有遗漏，那么这两个集合就是“一一对应”的（图 2.2）。想象一个巨大的舞厅，我们想比较一下男生和女生谁多谁少。一个个地数的话，就太枯燥了。不如让男生们去邀请他们的舞伴：如果每一个男生都邀请到了一个舞伴，并且没有一个女生被冷落成“壁花”的话，那么男生的数量与女生的数量正好相等；否则，应该会有人落单。若两个集合——男生集合与女生集合之中的所有项都一一对应，既没有重复也没有遗漏的话，那么我们就可以确定两个集合的基数是相同的。

回到数字集合，我们可以很容易地把 100 个整数组成的集合与 100 个偶数组成的集合相对应：

1, 2, 3,⋯, 99, 100

2, 4, 6,⋯, 198, 200

这两个集合的大小是一样的，也就是基数是一样的。

这都没有任何问题。但是，当我们开始应用无穷集合的定义时，悖论就突然出现了。比如，设想一个所有整数的集合 N 和一个所有偶数的集合 P。显然，我们可以将它们一一对应起来：

N：1, 2, 3,⋯, 99, 100, 101,⋯

P: 2, 4, 6,⋯, 198, 200, 202,⋯

N 和 P 有相同的基数。但从直觉上来说，集合 N 应该拥有更多的项：所有偶数都属于集合 N，但 N 还包含了奇数。既然 P 中所有项都包含在 N 内，那么 P 就是 N 的一部分。这不就与“两个集合大小相等”这个结论相悖了吗？正如伽利略关于平方数的结论一样，这不又回到了“部分与整体相等”这个悖论吗？

还有另一个相同的证明：证明有多少整数，就有多少百万的倍

数。1 对应 1 000 000，2 对应 2 000 000，3 对应 3 000 000，等等。采用百万的乘方也可以证得同样的结论，虽然这种方法比较少见：1 对应 1 000 000，2 对应（1 000 000）^{2}，即 10^{12}，3 对应 10^{24}，等等。康托尔的伟大之处就是不止步于此：所有这些集合都拥有同样的基数，如果这与直觉相违背，那也没办法了！

直到这里，这些一一对应关系只应用在整数集合 N 及其无穷部分中。但我们已经看到，N 不过是另一个更大集合的一部分，即有理数集合。有理数集合的基数又是怎么样的呢？通过类似推理，康托尔证明了有理数集合 Q 和集合 N 的基数是相同的！

康托尔将集合 N 的基数命名为 $\aleph_0$，读作“阿列夫零”。正如他描述那些可列（可数）集合一样（为了将它们与整数集合一一对应，只需一一计数即可），这第一个也可能是最直观的一个无穷数称为“可列数”。

可列数也是集合 Q 的基数。但整数只是集合 Q 很小的一部分。这是自反悖论的“加强版”。这个表面看起来很荒谬悖论，让无穷很难被人们接受，但戴德金和康托尔完美地扭转了局面。事实上，他们利用这个悖论去定义无穷集合：如果一个集合可以和一个与其不等的部分集合一一对应，那么它的基数是无穷的（戴德金公理）；换言之，如果这个集合和它的部分集合拥有同样的基数，那么该基数是无穷的。

整数集合的基数为我们提供了第一个无穷数——$\aleph_0$。借助有理数，我们得到了第二个无穷数，但我们已经证明它与第一个无穷数是相等的。我们是否可以走得更远？是否可以定义一个比有理数集合更大的集合？康托尔接下来的研究认为，我们可以定义很多不同的无穷基数。

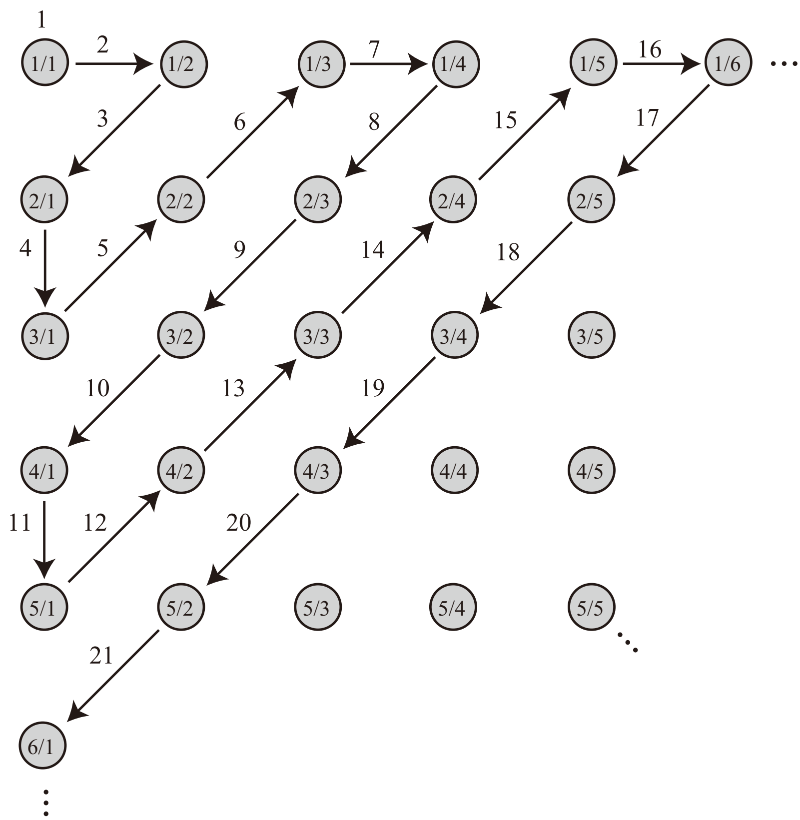


图 2.2 有理数的可列集合

康托尔证明，我们能将有理数排列在一个方格网中，通过图中箭头指示的路线，将整数与有理数联系起来。因此，有理数集合是可列的！

康托尔对角线

回顾一下，有理数是可以表示成整数比例关系的数。我们可以系统地将它们写成如下样子：

Q：1/1, 2/1, 1/2, 3/1, 1/3, 3/2, 2/3, 4/1, 1/4, 4/2, …

换言之，我们可以将有理数排列、排序。有了序列就可以将其标号。但是，这种标序仅是有理数与整数的对应，即整数在序列中的号码。这样一来，集合 N 与集合 Q 一一对应，拥有完全一样的基数。

然而，集合 Q 拥有许多不包含在集合 N 内的项，而所有集合 N 内的项都在集合 Q 中，因为所有整数都可以看作是一个分数。但是集合 Q 也包含所有不可约分数，它们不包含在集合 N 内。我们甚至还可以证明，在任意两个连续整数之间存在无数个有理数！尽管如此，整数集与有理数集大小一样……

■ 实数与连续统

数学家已经掌握了许多数集。其中最简单的有整数集 N 和有理数集 Q。但是，像 π 或 $\sqrt{5}$ 这样的数，它们既不是整数也不是有理数，而是无理数。不过，我们一样可以进行运算，或者说，我们需要用它们运算。实数集 R 包含有理数和无理数，也可以说包含实代数数和实超越数。数学家很了解实数集 R 的特点。很显然，其基数是无穷的，因为它包含所有整数与有理数。但实数集 R 也包含无理数，无理数既不属于整数集 N 也不属于有理数集 Q。这不能证明实数集 R 的基数会更大。那么问题来了：实数集 R 和整数集 N 的基数相等吗？

康托尔回答了这个问题：借助著名的“对角论证法”，我们可以证明集合 R 与 N 之间不存在一一对应关系；所以根据定义，R 和 N 拥有不相等的基数。我们把集合 R 的基数叫作“连续统的势”。那么至少存在两种不同的无穷集——可列集与连续统。康托尔将这些新数命名为“超穷数”。

■ 无穷的序列

那么，是否存在其他超穷数呢？康托尔再一次给出了肯定的回答。以某个集合 E 为基础，构建另一个集合 P(E)，它是 E 包含的所有集合（子集）的集合。有集合 {1, 2, 3}，其中包含 1、2、3 三个数。因此，这个集合包含三个项，它的基数为 3。该集合的子集首先是不包含任何项的空集，记作 ∅；而后是只包含一项的集合，如集合 {1} 只含一个数字 1，当然还有集合 {2} 和 {3}；再后是包含两个数字的集合，即 {1，2}、{2，3} 和 {1，3}；最后，该集合本身也是自己的子集。所以，集合 {1, 2, 3} 总共 8 个子集。概括来说，有穷集合 E 的基数为 c，P(E) 的基数为 2^c。

现在让我们以整数集 N 为基础。它最简单的子集只包含一个项：包含数字 1789 的集合，我们记作 {1789} 是 N 的一个子集。接下来，我们可以定义包含两个项的集合，比如 {1789，2016}。然后是包含 3 项、4 项的集合，等等。某些子集包含无穷个项，比如偶数集合、平方数集合等。所有这些子集都是 N 的子集集合 P(N) 的一项。

计数子集集合

集合 E 的基数为 c，所有子集的集合拥有相同的基数。怎么来计算集合的基数呢？首先给出 E 的一个子集 p，这相当于给 E 一个函数，函数有两个值“真”或“假”，问题是每一项是否属于子集 p。这样，E 的一个子集就相当于集合 W 中 E 的一个函数，集合 W 包含两个项——“真”和“假”。这样的集合叫作“分类”，它的项叫作“真值”。那么计算集合 E 的子集数量就是计算集合 W 中 E 的函数。一般来说，集合 W（基数为 n）中的集合 E（基数为 c）的函数个数为 n^c。比如在上述情况中，$n = 2$，P(E) 的基数值为 2^c。

我们注意到，问题的答案要么是“真”，要么是“假”，上述证明正是利用了这一点。这种情况有两个特点，一是通常所用的逻辑，称为“布尔逻辑”；再就是集合理论。但是，数学家们成功地推广了常规逻辑和集合理论。直觉主义逻辑的特点是一个问题的答案不局限于“真”或“假”两个选项，这导致集合 W 拥有两个以上的项（两个真值）。而对集合的推广得出了拓扑斯理论（topos），属于分类学范畴。数学家威廉·拉威尔和亚历山大·格罗腾迪克发展了拓扑斯理论，得出了量子物理学一些有趣的表达式。

1890 年，康托尔论证了他的基本定理：一个（有穷或无穷）集合的基数为 c，那么其所有子集的集合基数为 2^c；不论 c 是有穷还是无穷的，子集集合的基数一定比 c 大。这意味着，存在许多不同的无穷数。他还论证了实数集 R 可以与整数的子集集合 P(N) 一一对

应。结果是实数集的基数，即连续统的势，等于 $2^{\aleph_0}$。事实上，无理代数数的集合也具有可列集的势。在实数集中，超越数的子集的势一定高于可列集的势。现在，我们有了两个不同的超穷数，和一种构建其他超穷数的方法：找出一个集合所有子集的集合。康托尔试图为真正的无穷整体划分出一个等级。是否存在其他方式构成超穷数？超穷数总共有多少？超穷数列与连续统之间是什么关系呢？

问题太困难了，康托尔也没有全部解决。之后，这些问题与集合论、公理学和逻辑学相联系，引发了数学界的根本性变革。在这一过程中，康托尔的研究也引发了非难与批评。数学家利奥波德·克罗内克（1823—1891）扣留了康托尔的手稿，延迟了它在《克雷勒报》（*Crelle's Journal*）上发表——这是数学界最负盛名的报刊之一。在那篇手稿中，康托尔给出了令人瞠目结舌的研究结果。假设任一集合 E，定义 E × E 是集合 E 中项的有序对子的集合。比如，如果 E 是实数集 R，E 与直线上的点相混合，那么 R × R（也记作 R^2）就可以视为平面上所有点的集合（因为我们可以根据横纵坐标来确定一个点）。但是，康托尔用概括的方式证明，针对集合 E 整体而言，集合 E 和 E × E 总是拥有相同的基数。换言之，他证明了一个平面内的点的集合和一条直线线段上的点的集合拥有相同的基数。然而从直觉上来看，直线线段上点的集合似乎要比平面内点的集合要小得多！同理可证，三维空间的点的集合也和前两者拥有相同的基数……

康托尔也对这个结论颇感震惊，他写信给戴德金说："我发现了这个结论，但并不敢相信。"后来，是戴德金解释了这个矛盾结论的性质。并且，他不像某些数学家那样，在获知康托尔的成果后就开始重新审视几何学。戴德金认为，超穷理论与数学的其他内容完美并存，而且相关。

在无穷面前，直觉渐渐没有了用武之地。此时，康托尔再次展露不凡之处：他接受了这些新的真相，而没有宣称它们是悖论，并将这些真相当作建立实无穷真相的新根基。希尔伯特对康托尔的成果颇为着迷，向“真实的实无穷”的到来致敬。这一伟大思想宣告了一些现代哲学家所做的假设无效：“与无穷的关系一定不能用经验论术语描述，因为无穷超越了思维的疆界。”

康托尔，无穷的立法者

莱昂纳多·西尼嘉里（1908—1981）是一位意大利诗人、工程师、画家和艺术评论家，他在《恐怖真空》（*Horror Vacui*，1945）一书中完美地总结了康托尔的巨著。

“格奥尔格·康托尔的成果让我们看到了连续统的浓度、密度与势，看到了无穷的尺度和数集的顺序。我们终于可以从无到一，从一到多，在一直通向神的路上畅通无碍地漫步。康托尔为所有数字找到了适合的位子，没有一个被落下。他将线段上、直线上、平面上、空间上的点都排了序。通过对应的方法，他找到了度量、对比无穷的方法与术语。从对整数集、偶数集和质数集的思考开始：康托尔发现这三个集合拥有相同的势——可列集的势，拥有相同的基数，他将这个基数叫作阿列夫零……康托尔甚至还论证了，即使是有理数集和代数数集也是可列的；但是代数数的无穷性小于超越数的无穷性。代数数与超越数共同组成了实数。康托尔证明了实数集合拥有连续统势，并用第二个超穷基数来表达……康托尔找到了大量有穷数与超穷数的生成法则。他仅通过两个原理——一个是内在（加式）的，一个是超越（通向极限）的——发现了阿列夫家族。康托尔，无穷的立法者。”

连续统假设

实数无穷记作$\aleph_0$，这是第一个超穷数。其后是$\aleph_1$，然后是$\aleph_2$，以此类推。

另外，我们清楚地知道，可以取一个已知集合所有子集的集合基数来构建一个超穷数序列。如此构建的无穷等级为$\aleph_0$、$2^{\aleph_0}$和$2^{2^{\aleph_0}}$，等等。

阿列夫

在超穷数中，整体并不大于部分。我们用“阿列夫”作为表示超穷数的符号，它是希伯来语的第一个字母，希伯来语在西方有时被视为神圣的语言。在犹太教“卡巴拉”神秘主义观点中，这个字母意味着 En Soph，即无穷而纯洁的神性。

连续统的势已被证明等于$2^{\aleph_0}$，必定大于$\aleph_0$。其他阿列夫也大于$\aleph_0$。这两个超穷序列彼此要如何来排列呢？特别是，连续统的势在无穷等级中的位置在哪里？

在$\aleph_0$和$2^{\aleph_0}$之间是否不存在其他超穷数？想回答这个问题就需要知道$\aleph_1$（就构造而言，无穷即刻大于$\aleph_0$）是否等于$2^{\aleph_0}$。这就是“连续统假设”。对于所有的i，一定有$\aleph_{i+1}=2^{\aleph_i}$，这称为“广义连续统假设”。

1900年，希尔伯特将证实或证伪连续统假设的证明列入有待解决的数学问题中。康托尔竭尽全力想解决这个问题，但没有成功。

1938年，奥地利逻辑学家库尔特·哥德尔（1906—1978）找到

了出乎意料的决定性答案。他表明，（在集合论范围内）要证其伪是不可能的。1963 年，哥德尔的学生保罗·科恩证明了要证其实也是不可能的！连续统假设既不能被集合论证明，也不能被其否定。这是一个不可判定命题。这个理论并不自相矛盾，很简单，它没有表达什么。连续统假设（及其广义版本）是一个独立的公理：我们完全可以既承认它又接受它的反论，而且不与集合论相违背。我们完全可以假设连续统的势等于$\aleph_1$，但也可以假设它等于$\aleph_2$，$\aleph_3$，等等。

很多数学家对这种情况深感不满。像康托尔和哥德尔一样，他们认为一个好的集合论应该能够揭示连续统假设到底是真是假。

第一条解决之道是用另一个理论来替换常规的集合论。常规的集合论曾记作 ZF——这是为了纪念两位数学家恩斯特·策梅洛（1871—1953）和亚伯拉罕·弗兰克尔（1891—1965），他们于 20 世纪初定义了这个理论。然而，多种已被提出的替换理论几乎都没有引起大多数数学家的注意。数学家仍然偏爱简明的 ZF 理论，觉得连续统假说造成的新局面不是很严重。

第二条解决之道是承认 ZF 理论是令人满意的，但还不够完整。这需要加入一些公理来使连续统假说或其反论变得可证。数学逻辑领域上针对所谓“大基数”的研究工作或许可以提供这个谜题的答案。但是，数学家们又遇到了新的无穷，其范围之大恐怕连康托尔本人都会头晕目眩。大基数的相关公理是对巨大数的肯定。我们可以加入这些公理，而不用担心它们与 ZF 理论相悖，此外，这些公理遵循一种等级，就好像它们是 ZF 的自然延伸。这样，康托尔的理论中加入一些自然的新公理后，似乎得到了发展。从这个角度看，实无穷既不是悖论也不是逻辑不足，不像连续统假设的不可判定性那样曾让人们一度担忧。实无穷反而非常有逻辑性，近似真实。在物

理学上也有一个惊人的类似理论，就像我们在第 1 章所看到的，相对论让我们重新审视自己的时空概念——尽管表面看来很怪异，但相对论丝毫没有悖论性，它迫使我们重建了对时空的认知。对于已经接受这一深刻变革的人来说，我们找不到任何悖论来驳倒他们。在数学上也是一样。实无穷的概念迫使我们重建对数学对象和数学真相的认知。如果我们在思想上完全接受了研究实无穷的数学家们所提出的概念上的新宇宙，那么，那些我们认为在逻辑上站不住的情况也就不存在了。

不可判定性

1931 年，哥德尔变革了数学。他证明了某些关于自然数的真命题其实是不可证的。我们可能说，如果发现了一个真实的、不可证的定理，只需要把它当作新公理不就行了？这是不行的，因为哥德尔证明了一些关于这些数字的新命题是不可论证的。这就是“不完全性定理”，它让我们重新审视大卫·希尔伯特的想法，他试图将整个数学系统形式化，并生成“不可判定”命题的概念。在既定的公理系统范围内，比如在代数系统范围内，可以找出关于整数的命题，可以对整数进行运算和证明。但哥德尔证明，有一些命题即使是有意义的，也不可能证明它们是真还是假。不是我们不知道怎么证明，而是系统本身造成了这种不可能。换言之，这种系统留有一定的自由性：我们完全可以“决定”这个命题是真或是假。两种选择对应的是这个系统两种可能的延伸。

在超穷数问题上，哥德尔和科恩证明了连续统假设的不可判定性。我们可以判定它为真，也可以判定它为假。我们可以基于

任一种判定来继续研究，而并不会导致自相矛盾的结论。

不完全性和不可判定性的概念是数学、逻辑学和仍未枯竭的哲学三界思潮的中心问题。这两个概念与集合论相联，而与算法、信息学和可计算性概念更为息息相关。

■ 不可判定性与选择公理

康托尔对于超穷数的惊人结果看似没有任何疑点，这是一种极具逻辑性的理论。让人困窘的无非是连续统假设的不可判定性，但哥德尔已经证明，这并不妨碍数学的正常运转。

还有另一个关于集合无穷性的不可判定假说，名为“选择公理”。首先，设想一个有 n 项的有穷集合的有穷组合 A_i（非空），每个集合都包含有穷的项。组合本身也是一个有穷集合 $E=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$，其中 n 个项就是集合 A_i。显然，我们可以在集合 A_i 的项中任取一个项 a_i 来组成一个新集合。这样，我们就得到了一个有 n 项的新集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$。

但是，如果基数 E 是无穷的话，我们就无法证明公理仍是真实的。假设真的构成了选择公理：鉴于 E 是集合 A_i 的集合，我们可以从每个集合中取一个项来构建一个新集合。公理是不可判定的。

于是，我们可以决定接受这个公理：我们称这个集合论为 ZFC，即在之前的 ZF 理论上加入代表“选择”的 C（choice）。哥德尔在 1938 年证明，借此可以得到一些逻辑严密的数学理论。但是，我们一样可以认定这个公理是假的。科恩在 1963 年证明，借此也可以得出逻辑严密的数学理论！尽管如此，我们只能接受一部分应用了该公理的数学证明，这些证明所证的结论只在 ZFC 范围内为“真”。

■ “全知”数

实数无处不在，在数学中，在物理中……我们自以为很了解实数。然而，上述关于超穷数的结论带来了一些意外。我们看到，一个实数一般都拥有无数个小数。而计算小数的数量，也就是寻找罗列这些小数的方法。数学家已经给“可计算”下了一个定义，而且定义与程序有关[①]：如果存在一个可以计算某个实数所有小数的程序，那么该实数是可计算的。比如 π 就是完全可计算的。但也存在不可计算的实数。

其实根据定义，存在的实数数量就是实数集合 R 的基数，称为连续统的势。此外，我们可以证明能够输出可能程序的数目。换言之，这些程序的集合是可列的。但是，可列集必须小于连续统。结果，与每个实数都对应的程序不可能存在，也就是说，存在一些不可计算的实数，甚至还存在一种（不可列的）无穷性。哥德尔和图灵的研究成果完美地定义了这些数。

数学家格里高利·蔡廷在定义特殊的不可计算数方面走得更远。“蔡廷常数”（也称欧米伽常数）的诞生震惊了数学界，增强了大家的信心。如果我们了解了这个数，如果我们知道了如何计算它，我们将可能找到很多当前数学难题的答案。

为了介绍这个数，我们联想到 1927 年由爱弥儿·波莱尔引入的一个有点类似的数。想象一下，我们将大量的数学难题用问题形式表达出来，答案为“真”或“假”。接下来，将这些问题分类，比如按某种语言的字母排序。波莱尔的数字由其小数定义：如果某位上问题为“真”，那么该位小数为 1；如果某位上问题为“假”，那么该位小数为 0。如果我们已知这个数，这就意味着我们知道它所有的小

① 借助通用计算机或图灵机的概念，我们得以在数学上精准定义这个概念。

数，也就是所有问题的答案。蔡廷受到波莱尔数的启发。蔡廷常数是一种精确的数学表达，他把这个数命名为“全知数”。

数学上的更多无穷

“数学就是一门关于无穷的科学。”

——赫尔曼·外尔

■ 无穷与透视

透视学来源于应用几何学与阿波罗尼奥斯（公元前 262—前 180）的圆锥理论。起初，透视学研究的是如何在平面内表现三维效果。文艺复兴时期，线性透视的发明成了透视学发展的里程碑。通过线性透视，几何学上的实无穷虽然尚未引发人们的思考，却已经在绘画中第一次被表现了出来。在画中，无穷被表现在地平线上，或者隐藏在一堵墙、一扇门的后面。线性透视在平面的画作上投射出假想的笔直光线，光线从要表现的物体出发，投射到假设的画家眼中。这种透视也称为中心透视或圆锥投影：眼睛是投射的中心 O，物体周围各点与 O 的连线形成了以 O 为顶点的一个锥体。一般来说，在线性透视中，空间内所有平行直线都投射为一组汇合的直线，汇合点就叫作“中心灭点”——这是 1435 年莱昂·巴蒂斯塔·阿尔伯蒂（1404—1472）给出的定义（图 2.3）。15 世纪文艺复兴初期，意大利画家与建筑学家们，比如菲利波·布鲁内莱斯基（1377—1446）、阿尔伯蒂和皮耶罗·德拉·弗朗切斯卡（1416—1492）等人让透视构建法则变得系统化。就这样，他们开创了透视学的几何化应用，既非常符合人类视觉习惯，又具有极高的实用性，透视学也因此得以

发扬光大。

与此同时，文艺复兴时期的艺术家们在绘画中也将现实中的平行直线定义并绘制成汇合状，第一次实现了实无穷的视觉呈现：事实上，画作中的灭点在现实中位于无尽的远方，而画作中的平行直线就在灭点交汇。借助这些直线，几何上的无穷获得了一种人类视角，可以被人类清晰地感知。哲学家们的潜无穷变成了几何学家们的实无穷……

17 世纪初，实无穷的产生引发了几何学领域的革命。这场革命是由法国里昂几何学家吉拉德·笛沙格（1591—1661）发动的，他表示，平行性只不过是无穷中的汇聚而已。

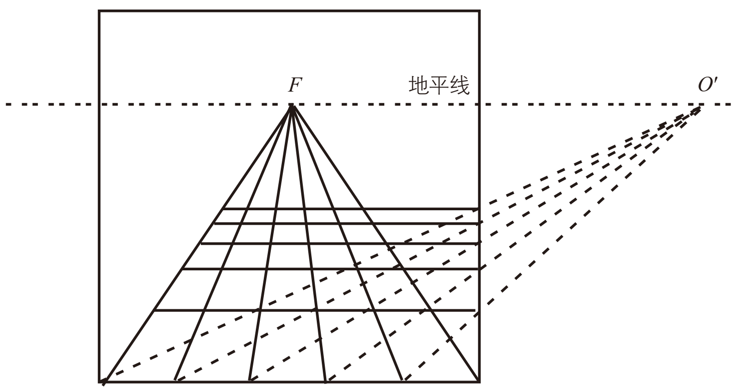


图 2.3　中心透视

阿尔伯蒂绘制的这张图非常巧妙，呈现了从上方俯视的一片方砖地面。首先，先画出一束平行直线，但它们在位于地平线上的灭点 F 处汇合。接下来，在地平线上取一点 O'，该点到画布的距离为 d（d 是画家眼睛与画布的距离）。从 O' 画一组线段，与汇合在 F 点的直线的出发点相连接。这些线段与画框竖直边缘相交的地方就是方砖地水平方向平行线应该在的位置。

笛沙格的发现为广义射影理论打开了大门。射影几何隐约展露出非欧几何的影子——在欧氏几何中，我们也遇到过对无穷的呈现——并设想出非欧几何的欧氏模型。比方说，在庞加莱的“双曲面”模型中，无穷变成了圆上无数的点，被放置在有限的距离上（图 2.4）。

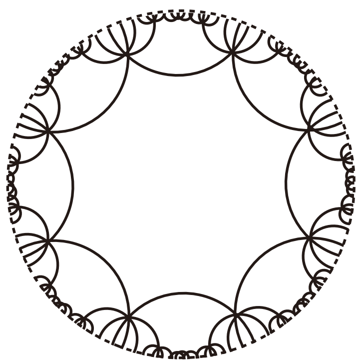


图 2.4　庞加莱双曲面的射影呈现

圆内是平面，平面的直线表现为直交于外轮廓的圆弧。这是一个非欧几何的欧式模型，因为过直线外一点有无数条直线与之平行。

■ 超穷序数

我们已经了解到，康托尔是如何将无穷集合的基数视为明确的对象的。然而，为了发展出真正的“无穷算数”，将用于测量有穷整数的计算法则扩展到无穷数上，我们就要区分两种无穷数——基数与序数。

序数属于有序集合。序数列是一列连续的有序整数 $0 < 1 < 2 < 3\cdots$，而且遵循如下性质：“无论在哪个序数集中，总有一个更小

的序数。”对整数来说，这是确定无疑的：对于严格位于 0 到 5 之间的集合来说，最小整数是 1。但对于实数来说，就不是这样了：1.01 大于 1.000001，1.000001 又大于 1.000000001，以此类推。康托尔证明，无穷序数列存在。从定义来看，存在一个更小无穷序数，记作 ω；这与最小无穷基数 $\aleph_0$ 相混淆。同样，存在一个大于 ω 的更小序数，记作 $\omega+1$，然后是 $\omega+2$，等等。于是我们得到 $\omega+\omega$，记作 2ω，但我们还能继续得到 $2\omega+1$……将用于测算有穷的计算法则（加法、乘法、取幂）应用到无穷序数上，我们就可以得到 ω^2、ω^3、ω^ω……无休无止。

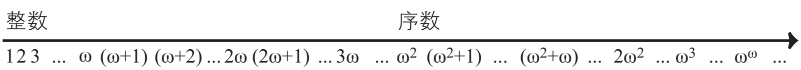


图 2.5　序数列

■ 古德斯坦序列

1944 年，英国逻辑学家鲁宾 · 古德斯坦发现了最令人惊讶的数学问题之一——介于无穷和有穷之间。

小数可以用来书写所有 10 进制整数：整数可以分解为 0 到 9 之间的几个整数与 10 的幂相乘的数。比如，已知 $10^0=1$，整数 266 对应的分解为：

$$266 = 2\times10^2 + 6\times10^1 + 6\times10^0.$$

计算机采用 2 进制运算，于是 10 进制中的整数 266 可以解析成 2 的幂：

$$266 = 2^8 + 2^3 + 2^1.$$

我们把一个类似过程称为“p 乘幂”：我们将指数写作底数 p，

指数的指数取同样的底，等等。比如，266 的迭代 2 进制写作：

$266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2.$

现在，我们再看一种称为“扩张”的运算。以任一整数为“种子”，运算分为两步：将整数 n 的底写成 p 的乘幂，然后将所有 p 替换成 $p + 1$——这是基本过程。我们来扩张一下整数 266。将所有 2 替换成 3，得到整数 266 的第一次扩张 $d_2(266)$：

$d_2(266) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3$

如此会得到一个以 10 为底、共计整整 38 位的数字，也就是达到了 10^{37} 级别。扩张生成的数字比原来的基数要大得多!

在这些简单方法的基础上，我们再来定义古德斯坦序列 $g_p(n)$：任一整数 n，即“种子”，在扩张后再减去 1，以此类推。例如以整数 266 为种子，于是有 $g_2(266) = d_2(266) - 1$。我们可以看到这个数字达到了 10^{37} 级。

接下来 $g_3(266)$ 就等于：

$d_3(g_2(266)) - 1 = d_3(3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2) - 1 = 4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1$

这是一个达到 10^{615} 级的数字。继续进行下去，我们会得到 $g_4(266)$，大概为 10^{9999} 级。很明显，以 266 为种子的古德斯坦序列似乎以极快的速度不断繁衍，直至无限。另一个种子来生成古德斯坦序列也一样……

然而，古德斯坦定理表示“不论初始种子 n 是多少，古德斯坦序列最终都会归为 0”！

很难相信吗？以最初几个种子为例，很容易就能证明这一点。在种子为 2 的情况下，我们发现 $g_4(2) = 0$，种子为 3 时，$g_6(3)=0$。当然，这是因为对于如此小的种子来说，扩张的效果没有足够的时间来体现。但从 4 开始，事情就变得有趣起来。通过略微复杂一些的

证明可知，4 的古德斯坦序列在历经一系列惊人的步骤后取值仍为 0，也就是说，$g_p(4)=0$，$p = 3 \times 2^{402653211}-2$，这是一个达到 10 的 1.29 亿次幂的数字。

当 –1 次幂也参与进来后，这一现象就变得没那么不可理喻了。甚至可以说，相对于那些扩张而来的吓人的天文数字，这个现象简直微不足道。最终，它减弱了序列的增长，使之逐渐减少，在历经一定量的运算之后，序列值最终归零。

人们还猜想，对于那些更大的基数，这个证明可能就无效了。难道不存在一个通用的古德斯坦定理证明方法吗？

当然有。世上确实存在一种对所有种子数都有效的证明方法，但需要跳出代数范围，并借助超穷序数。这就变得复杂了。我们现在只是在代数范围内，也就是说，古德斯坦定理只涉及整数和加、减、乘、除四则运算，然而证明会用到一些无穷的概念。

因此，人们自问是否可以避开无穷，通过递推法找到另一种巧妙的证明方法[①]。很可惜，并没有！劳伦斯·柯比和杰弗瑞·帕里斯在 1981 年证明了一个定理，证实不论我们如何设想，永远不可能用递推法证明古德斯坦定理，也就是说，只用整数和四则运算是不可能证明这个定理的。

这一结论恰恰展现了古德斯坦定理的特性。它精准地呈现出潜无穷与实无穷的差别：前者出现在代数中，根据递推原则可得到一个无穷的整数序列；而后者出现在超穷序数中。这是基于代数公理的不可证代数性质的一个最简单的例子，换言之，它美妙地展示了哥德尔不完全性定理。

---

① 递推法证明，如果一个性质对于整数 n 是有效的，那么对于整数 n+1 也是有效的。

总之，只有无穷可以证明涉及整数的古德斯坦定理。这是可将无穷运用于数学的一个有力证据——与直觉主义者的想法相反，我们不该放弃这种可能性……

■ 非标准数

超穷数是一些无穷数，但我们可以运算它们，利用它们计算。然而，超穷数的性质与我们通常进行运算的数字不同。比如说，我们无法给出它的倒数。因此，数学家们还发明了其他无穷："非标准"理论以与整数有理数相似的性质定义了非标准数。

"非标准数"是数学家亚伯拉罕·鲁滨逊（1918—1974）在 20 世纪 70 年代引入的概念。他曾对一种数学意义上的精确"模型"很感兴趣。这种模型包含了整数和一些补充数，他将这些补充数描述为"非标准无穷大"。这些数可以被运算，并遵循所有无穷大数的计算法则，但不涉及任何无穷过程。它们完全就像是实无穷大一样（图 2.6）。

鲁滨逊定义了它们的倒数，即"非标准无穷小"。他证明了这些数遵循无穷小运算法则，而不需要牵扯可证明的边界问题。比如说，我们可以随意在其中添加数字，而永远不会得到一个真实的标准数，也就是说非无穷小数。

这些研究成果的一个重大意义就是得出了边界问题引出的无穷大或无穷小与非标准无穷大或无穷小之间的对应关系。这种对应关系又衍生出证明方法。首先，这保证了对非标准数计算的合理性，但这并不影响我们去考虑它们在数学中所处的位置。不过，这也提供了一些切实的可能性：从整体上来说，有证据表示借助非标准数，所有传统无穷中的已证结论都可以找到反论。然而，关于非标准数

的证明更为简单、方便，因为非标准数可以像数字一样运算，所以没有必要自找麻烦，牵扯序列极限问题。因此，非标准数似乎是一个证明无穷的法宝。

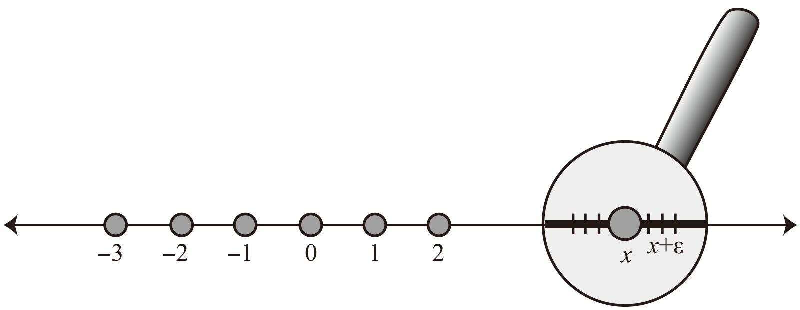


图 2.6 非标准数密度

实数——包括整数、有理数与无理数——可以用一条直线上的点来表示。非标准分析在每一个实数 x 周围又找到了一个非标准无穷小的“晕”，表示为 $x+\varepsilon$，ε 是一个无穷小。

■ 超实数集

一个同类过程引入了超实数集概念，从而完善了集合理论。21 世纪初，集合论建立不久之后，数学家、哲学家伯特兰·罗素提出了一个著名的悖论。罗素对“不属于自身的集合”很感兴趣，他假设集合 E 由“一切不属于自身的集合组成”，并提出了这样一个问题：E 是否为自身的子集？基本的逻辑推理证明，问题的答案既可以是肯定的也可以是否定的。这个悖论用集合的语言描述了“说谎者悖论”：一个说谎者宣称自己说谎了，如果他真的说谎了，那么他就不是一个说谎者；如果他说的是实话，那么他就说谎了！

这个悖论深刻地动摇了数学界。问题的答案是，我们不能将 E 视为一个集合。人们不得不重新更严谨地定义集合论——更精确地说是“策梅洛 – 弗兰克尔集合论”——禁止将某些“组合”视为集合，尽管从理论上来说它们看起来很像集合。比如，不能有“所有集合的集合”，也不能有“不属于自身的集合的集合”。

在策梅洛 – 弗兰克尔集合论的基础上，约翰·冯·诺依曼（1903—1957）引入了“正则性公理”，进一步限定了可以被视为集合的对象种类。这条公理排除了诸如“属于自身的集合”等的可能性。但是，这条公理也可以被否认，承认“属于自身的集合”的存在。这个被我们所承认的新对象，称作超实数集。比如，存在一个超实数集仅包含其自身一个元素。这个新理论看起来与直觉不太相符，却被证明是逻辑严密的，而且不会导致任何逻辑上的反论。新理论甚至十分实用，尤其在计算机科学领域中。

在某种程度上，超实数集令人回想起实无穷的概念：我们不能直观地看到它，但可以将其完美地概念化并加以运用。超实数集是否真实存在呢？无论如何，答案都是开放的，特别是，它取决于我们如何定义“存在”。

■ 有穷的游戏，无穷的游戏

长期以来，级数收敛或积分收敛的几何表达看起来充满悖论。

试着将方程曲线 $y = f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$，绘制到笛卡儿坐标系中（图 2.7）。方程曲线 $y = f(x)$ 所包含的面积（f 是任意方程）和横坐标 x 是由积分 $s = \int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 为 x 赋值的。

在我们关心的情况中，积分值算得为 $s = 1$。换言之，两条长度

无穷的曲线之间的面积却是有穷的！这种情况一般只会出现在渐近线中。早在 17 世纪，耶稣会教士伊格纳茨·加斯东·帕尔迪就惊讶地发现了这一点，他表示："无穷，不论它多么巨大无边，多么不可计数，都会在算数与集合中变小。我们的思想比无穷还要广袤，完全有能力理解它。"帕尔迪的总结是，人有灵魂，这就是上帝存在的证明。

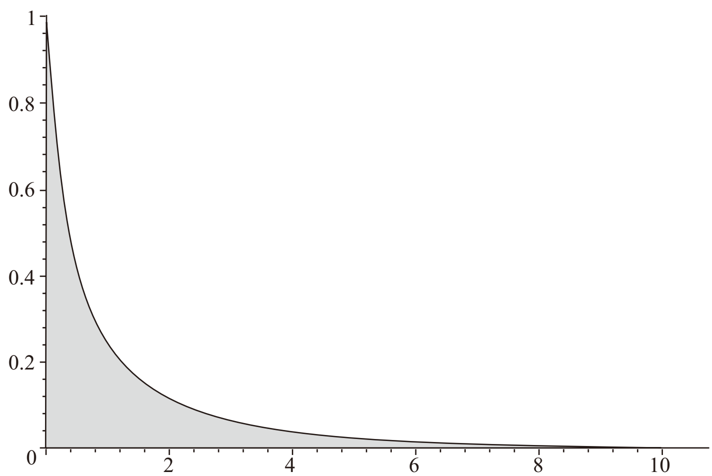


图 2.7　曲线与长度无限的坐标轴之间的面积（灰色）是有限的

换个角度："分形体"是一种无穷与有限不断交织的数学实体。从康托尔开始，人们在一个世纪中逐渐认识了具有各种特性的曲线：有的曲线长度无穷，却划定了一个有限的面；有的曲线长度很短，却包含着无数的点。20 世纪 70 年代初，本华·曼德博创立了"分形几何"概念来描述上述曲线。fractal 一词来源于拉丁语 fractus，意思为曲折、不规则的。分形几何最经典的例子是对不列颠海岸线的精

细分割（图 2.8）。事实上，海岸线长度取决于采用何种测量单位（也就是分解单位）：测量单位越小，测量结果就越精细，长度就会越长。分解无限地细化，海岸线长度也趋于无穷。在精确的数学体系中，每一个分形体都由众多自相似的结构无限重复，拼接而成。但是分形可以有多种层次，不同层次形状不变的性质就叫作“自相似性”。当然，这是一种理想化状态，在自然界中很难找到完全对等的情况。

然而，自然界中存在大量现象，如涡旋、从混沌到秩序的转换、山脉的断层、水晶结构、矿物表面纹理、血管与毛细血管系统等，都无限近似于分形体。这些“内在无穷”的典型例子完美呈现了数学上的分形几何。研究这些对象，让我们把绝对自相似分形与统计学上的自相似分形区分开来。一个分形结构的凹凸程度与分割程度用“分形维度”概念来定量，这个维度通常是一个非整数。



图 2.8　冯·科赫的分形三角

海里格·冯·科赫在 1904 年发现了第一个分形图。给定一个等边三角形，将三角形每个边三等分，并擦除中间的一段，然后在线段空缺的地方再绘制一个等边三角形，无限重复这一步骤。已知第 n 步的周长为 $4(4/3)^n$，那么周长随 n 值变大而趋于无穷。然而，周长内的面积却是绝对有限的。

分形几何在计算机图形中的应用尤其引人注目。多亏了分形算法，从 1975 年开始，IBM 公司的工程师理查德·福斯与曼德博一

起，成功制作了一部展现阿尔卑斯山分形山脉的影片，影片的写实效果十分惊人。不久之后，卢卡斯影业有限公司合成了虚拟星球的壮观景色，观众们可以随导演一起随心所欲地打造这颗星球。

分形图之美让图形艺术作品取得了大发展。

■ 李群

无穷小理论在变换群中的应用更凸显了无穷在数学中的普遍存在。几何学家和物理学家对相对论物理学和量子物理学中产生的群组十分感兴趣，这些群组将不同的空间变换或抽象变换加以分类。其中最常见的变换就是以数学家索菲斯·李（1842—1899）的名字命名的“李群”。

人们首先会从无穷小的角度去思考变换的问题，所以这些数学结构让人联想到无穷。比如我们可以证明，所有环都能通过将无数个角度极其小的无穷小环组合得到。更普遍地讲，任何有穷变换都可以通过将无数个无穷小变换组合得到。

这种奇特的过程有个优点：只需定义有限数量的无穷小变换的特性就足够了。这就是所谓“李代数”的“母函数”，李代数与李群密切相关。几乎所有这些无穷群的特点都来自于数量有限的无穷小变换的特性。

理论物理学的诸多领域都会遇到持续性对称，而李群通过对其进行数学描述，在 21 世纪越来越被科学家们所重视。特别是由威廉·基灵在 1887 年所发现“E_8 群”——这是复合李群中最大的群，序列为 8，维度为 248——在当今粒子物理学的“大一统理论”中被频繁使用。实际上，它包括了整整一系列的统一群，如 U(1)（由量子电动力学来描述电磁学）、SU(2)（电弱相互作用描述）、SU(3)

（由量子色动力学描述强相互作用）和 SU(5)（强、弱、电磁相互作用的统一理论）。E_8 群在超弦理论，即上述三种相互作用与引力大一统的理论中也经常出现。

有穷论与直觉主义

即便是不接受潜无穷的亚里士多德也不得不承认，借助无穷概念是一种数学需要。阿基米德的穷竭法就是借助了隐藏、暗含的无穷的一个典型例子。人们在很长一段时间里都认为，至少在大部分数学领域中，实无穷并不是必须的。但就像托尼・勒维所写的那样："数学以无穷为中心，编织着自己的网。"无穷的概念不可或缺，它已经渗透到数学的各个分支中。凡是我们能想象到的地方，无穷都成功地潜入了。例如在数学中，人们已将空间概念与无数维度联系在一起。

然而，一场"有穷主义运动"却逆势兴起。这一数学哲学立场表达了一种观念：重提无穷没有什么意义，因为由无穷定义的对象或结构并不存在。在 20 世纪初，这种说法在数学界和数学哲学界引起了诸多争论。但是，由于有穷论数学思想排斥使用无穷，因而显得不甚高明。

认为借助"无穷"概念是毫无意义的，这似乎是一种充满个人倾向的想法。的确，无穷不属于直觉范畴，但这仅仅是某些数学概念的情况。数学不是一种经验主义科学，也不强制要求直观可见的呈现方式，或强求采用可操作概念的可视化表达。借用罗素的话说，数学研究的不是概念的存在性问题，而是存在的可能性问题。

至此，各种假设的无穷的存在尚未引起什么自相矛盾的问

题。希尔伯特一派的“形式主义”数学家们认为，应当证明“假设无穷存在永远不会带来任何矛盾”。但是，他们只在某些条件下才接受无穷。

逻辑学家鲁伊兹·布劳威尔（1881—1966）创立的“直觉主义”流派认为，数学是一种精神行为，源于人们对时间的觉知——我们由此而建立了最根本的直觉。对于涉及无穷的各种可能概念，直觉主义者关心的是它们能否被正确地定义。布劳威尔写道：“在科学中，能够被感知的一切都被置于‘自身’之外，置于一个独立于自身的感知世界；被感知的事物失去了与自身的联系，失去了唯一的来源和指引。这构成了一个数学逻辑学的基质，它就像一个与生活完全脱节的幻象，在生活中如同一座混淆了语言的巴别塔。”于是，直觉主义者回避整体上的无穷，却不排斥运用无穷序列和边界的概念。比如，他们接受用递推法得出的证明。直觉主义理念与古希腊人相似：他们接受某种意义上的潜无穷，但不接受实无穷。对直觉主义者来讲，所有关于潜无穷的表述其实无非是对有穷体系的一种延伸性描述。

形式主义者与直觉主义者只接受数学中可以用有穷结构来阐述的部分。针对康托尔的无穷论，克罗内克宣称：“上帝创造了整数，剩下都是人类的作品。”1910 年，作家、思想家保罗·瓦勒里结束了这场模糊不清的争论。他付出了前人未有的努力消除文化间的隔阂：“我们是在用有穷的感觉去感知无穷。无论如何，这都不算是一个证据。”

第 3 章
物质的无穷

“曾经，万物都聚在一起，数目无限多，体积无限小；因为小也是一个无穷的量。”

——阿那克萨戈拉

持续性、延展性与无穷性

正如伽利略所言，物理是用数学语言书写而成的。因此，数学中的无穷也该在物理中存在。这涉及所有具有延伸性的量：既有第 1 章提到过的空间和时间，也有第 2 章所讲的数集，而最后就是物质。

通过简单的反演变换，数学中的小数与大数相互对应起来。如果数字 A 逐渐增大，趋向无限，那么 $1/A$ 就会逐渐减小，趋向于零。这又将 0 与无穷对应起来。因此，亚里士多德的《物理学》中说，无穷小与无穷大是对称的——这是除法所得的无穷，也就是当无限切割一个量时呈现的无穷性。

在 21 世纪初，数学的发展使人们更好地掌握了无穷的概念，但也为此付出了代价，不得不搭建起一个更复杂的概念体系。我们认

为，无穷的概念，如超穷数，并不像数字那样容易被反演变换。因此，无穷小与无穷大的性质与发展历史截然不同。这不仅在数学上是如此，在物理学上更明显：无穷大与无穷小涉及的学科分支貌似完全脱节，一边是天体物理学和宇宙学，而另一边是粒子物理学。但是我们将在第 4 章透过空间与时间的无穷小问题看到这两者之间的联系。当今，这个问题变得十分关键。

一个有穷的量，比如一段线段的长度、一段时间的长度、一种物质的量，至少在我们的脑海中是能被分割成无数的子元素的，无穷小的问题就由此衍生而来。为了了解某一系统的变化或运动，分析应当越精确越好，将空间或时间的间隙以及物质的量划分得越细微越好。机械运动学与动力学就是这样诱导我们将时间与空间的量细分化。同样，关于物质和用来测量物质延展性的量，如质量和体积，无穷小的问题是无法回避的。

空间、时间、物质，所有这些量的无穷小划分都与物质的延续性有关。我们将在第 4 章讲述新学科在这方面的研究。对延续性的研究思路深深植入人类认知宇宙的方式中：延续是我们周围宇宙中的物质硬度、浓度和稳定性的直观标志（图 3.1）。石块是坚固的、封闭的，海面是平静的，这都展示了自然中的延续性，而所有这些都是无法断裂的。



图 3.1　14 世纪的中世纪百科全书

世界的延伸是无穷大的吗？物质的结构是无穷小的吗？这幅图展现了上帝知道所有这些本质性问题的答案。而当今物理学正合理地慢慢接近问题的答案（见彩图）。

图片来源：© Bibliothèque Sainte-Geneviève, Paris. / RIHT

芝诺悖论

“这一小片希腊的暗黑就能触动我们的宇宙观吗?”

——博尔赫斯,《阿喀琉斯与龟的永恒赛跑》

公元前 5 世纪，埃利亚的芝诺提出了一些悖论，看似既与延续性假说相悖，又与原子论假说相悖。多亏了亚里士多德的记录，这

些悖论才能被今天的人们所熟知：“芝诺的第二个论据的主人公是阿喀琉斯。他声称跑得最快的阿喀琉斯永远追不上跑得最慢的龟，因为追赶者总是必须先到达被追赶者之前到过的地方，那么乌龟永远比阿喀琉斯领先一定的距离。”另一个著名悖论是“飞矢不动悖论”：实际上，每次飞矢飞过了一半路程，都还有另一半路程要飞抵，以此类推，所以飞矢是不动的。

作为巴门尼德学派的忠实门徒，芝诺想通过这些悖论否认物质可以抵达宇宙，特别是否认运动的可能性：运动是不可能的，因为运动者需要通过中间点，而后再通过中间点的中间点，再而要通过中间点的中间的中间点才能抵达终点，万世不竭。

此后，某位无名哲学家兼诗人补充了亚里士多德关于阿喀琉斯与乌龟的简短记录，令芝诺的悖论更容易理解。下面是大家更熟知的故事版本，由阿根廷作家博尔赫斯改写：“阿喀琉斯奔跑的速度是乌龟的 10 倍，乌龟的出发点领先他 10 米。阿喀琉斯跑过这 10 米，乌龟向前跑了 1 米；阿喀琉斯再跑过这 1 米，乌龟向前跑了 1 分米；阿喀琉斯跑过这 1 分米，乌龟又向前跑了 1 厘米；阿喀琉斯再跑过这 1 厘米，乌龟又向前跑了 1 毫米；阿喀琉斯挪动一小步跑过这 1 毫米，乌龟又向前十分之一毫米……就这样，阿喀琉斯永远也追不到乌龟。”

人们在长达 2300 年间奋力反驳，几乎就要将这个悖论摧毁了。亚里士多德站出来，从纯哲学角度反对芝诺，他否认了无止境的可分性，即“无穷倒退”。这个概念令人费解，让许多哲学家和神学家耗尽笔墨，争论不休。有人甚至用它来证明上帝的存在。托马斯·阿奎那指出，万事有因，但这个原因也是某个前因的后果。因此，宇宙也是许多“因”引发的“果”。每一个原因都是一个结果，每一个现状都来自之前的一个状态，继而又决定了其后的一个状态。

但这一系列因果本是不存在的，因为将它们组合在一起的限定条件是假设的。然而，宇宙是“存在”的。我们从宇宙的存在可以推出必有一个最初的非偶然的因——这就是神！

而后，莱布尼茨和其他许多思想家也重拾这一推理，对于“偶然性”问题给出了一个神学解释：“为什么会存在物质而非空无？”我们发现，这也是一个宇宙学问题，是大爆炸模型所面对的问题。无论如何，芝诺那些表面貌似很荒谬的诡辩竟然从一个简单的无穷悖论牵扯出如此深远的问题……

斯图尔特·穆勒（1806—1873）在《逻辑系统》一书中这样解释：推理的错误源于混淆了无限可分的时间和无穷的时间。跨越一个空间需要一段无限可分的时间，但并不是一个无穷的时间。从数学角度来说，用收敛序列就可以很好理解：10+1+1/10+1/100+1/1000+1/10000+…这个几何上的无穷序列的总和是一个绝对有穷的数，即 11+1/9。

最后，罗素基于波尔查诺和康托尔关于无穷的定义之上，清楚地反驳了这个悖论：我们可以将一个无穷集的元素拆分成两个无穷的集（见“无穷变为现实”）。一旦接受了自反性悖论，就意味着子集包含的元素并不比整体少。宇宙中确切包含的点的数量在 1 米甚至 1 分米的距离中也会存在。阿喀琉斯难题的答案就在这里。乌龟走过的每一个地方都对应着阿喀琉斯走过的某处。只需将两个行程的各个点一一对应起来。原先记作乌龟领先的点已不复存在，乌龟爬过轨迹的最后一个点和阿喀琉斯跑过轨迹中的最后一个点以及赛跑时段的最后一刻相互重合……

其实，威廉·詹姆斯曾提出过芝诺悖论的另一个时间版本：14 分钟是无法流逝过去的，因为要度过 14 分钟，总要先度过前 7 分钟，在度过后 7 分钟之前，总要先度过 3 分半钟，度过后 3 分半之

前，又要先度过 1 分 45 秒……穿过时间的迷宫，直至那个无法抵达的终点。

微积分

> “我认为，物质的任何部分——我不想用不可分割这个词，但实际上是不可分割的。因此，最微小的粒子也是一整个世界，包含着无穷、各异的创造物。”
>
> ——莱布尼茨

无穷小问题是运动学和动力学的源头，也就是物理学的源头。从阿基米德到伽利略，人类对于自然的研究历经了很多阶段，每个阶段都试图用数学来解释宇宙。但是，这种尝试碰到了无穷小问题。无论研究对象是空间、时间或其他什么量，我们马上会遇到不可分割悖论：如何站在严谨的数学角度，去阐述那些无限小部分的无穷数量呢？这就是芝诺悖论表述的问题。

在数学和物理学的交叉领域，这些悖论曾经阻碍了动力学乃至整个物理学的发展。直到 17、18 世纪，人们找到了解决这些悖论的方法，终结了数学或更精确地说是几何学所构建的理念；借此，人们可以真正掌握并理解事物的本质。不过，这一解决方法又在新的基础上重建了数学物理学。

在伽利略和笛卡儿提出的惰性与运动等问题中，暴露出“不可分性”带来的难题。阿基米德发明的“古人的方法”（见第 2 章），被格里高利·德·圣文森（1584—1667）重命名为“穷竭法”，并在费马（1601—1655）、帕斯卡和约翰·沃利斯（1616—1703）的研究

中都被重新当作基础，而他们的研究开启了微积分的大门。与此同时，笛卡儿和费马引入了笛卡儿坐标，将不可分性引发的几何学难题转换到了数字领域。几何被数字化后，数字在数学中的地位就高于几何长度了。此后，莱布尼茨和牛顿分别独立地将微积分系统化——牛顿称之为“流数术”。莱布尼茨虽然成功设想出一种毫无悖论的“无限可分运动”，并发明了一种逻辑严密的非零无穷小数字运算，可他把无穷小量视作“无现实本体的虚幻”和“理想概念”。

在那个时代，数学对象就是现实的承载者，恰如现代人眼中的电子。因而在当时，“无穷小量”概念引发了一阵恐慌。一段时间之后，人们才看到了无穷小在物理学上不可否认的作用。18 世纪初，皮埃尔・伐利农（1654—1722）和丰特奈尔将这种新型运算方法加以概括，让运动学及其与无穷的关系发生了变革。无穷小问题在数学上变得可操作了，数学物理学也因此成形。数学物理学是在严密的数学公理、原理和概念系统上建立起来的物理学，而公理、原理和概念的推理可以与科学实验相对应。欧拉和约瑟夫・拉格朗日（1736—1813）在无穷小分析中充分应用了数学物理学。

无穷的符号

17 世纪，微分计算及其公式化让人们终于能计算无穷小量。无穷小的倒数是无穷大。同样是在 17 世纪，无穷大的符号 ∞ 出现了。英国数学家沃利斯首次使用这一符号来表示无穷的概念。为什么选择这个符号来代表无穷大呢？事实上，沃利斯还是著名的语史学家。或许，他知道这个符号出现于 7 世纪的拉丁语中，是字母 m 的连体字，也就是草体。这是用来表示数字 1000 的罗马字母，代表着一个“很大”的数。与沃利斯同时代的荷兰数学

家、哲学家纽文泰特在 1695 年出版的《无穷分析》一书中就使用了符号 m 来表示无穷。沃利斯也可能认为，符号∞所呈现的环会让人联想到无穷，因为我们可以沿着这个环永远走下去……

$$M \rightarrow m \rightarrow \infty$$

逐渐，数学上的无穷小被接纳了。虽说这奠定了微积分的基础，构建了数学物理学，但是，人们距离真正的无穷理论还远得很。在整整两个世纪里，数学家和物理学家成功构建了一系列运算技巧，但仍对其哲学基础抱有怀疑。我们已经看到，直到 19 世纪，这枚“数学之贝”中恼人的沙粒才终于变成了珍珠，这就是康托尔的集合理论（见第 2 章）。然而，这些成果跟物理学没什么关系，也不能解答关于物质的难题。

物质的可分性

我们可以无限地分割物质吗？物质是延续的，还是离散的？我们可以无限地分割一段物质，使其越来越小，还是会止步于一些不可再分的单位？我们已经知道，物质由一些不可分割的单位（原子）构成，这个想法最初是由德谟克利特（公元前 460—前 370）提出的。这位古希腊哲学家认为，物质的分割极限是一些不可再分的基本微粒。

除了中世纪有一些模糊记载，原子理论直到 19 世纪才又被正式重提。原子概念被一点点确立起来，原子被认为是构成物质的基本单位。但很快，在现代的原子定义中，原子本身也具有了内部结构。约翰斯顿・斯托尼在 1891 年发明了“电子”一词。起初，这是用来表示电的基本单位，后来用于表示基本带电粒子。随后，让・佩兰、

约翰·汤姆森和罗伯特·密立根的研究确立了电子概念——构成原子的带负电荷的粒子。由此可推，还存在一种带正电荷的粒子。1904 年，汤姆森提出原子中心应该有一个带正电荷的原子核，周围环绕着核外电子。1911 年，欧内斯特·卢瑟福确认原子中心有一个带正电的原子核，原子核很小却很密实，被电子包围着。卢瑟福测得原子核大小为 10^{-13} 厘米，整个原子体积大约在 10^{-8} 厘米级。根据他的说法，实际上，原子主要由真空构成（图 3.2）。

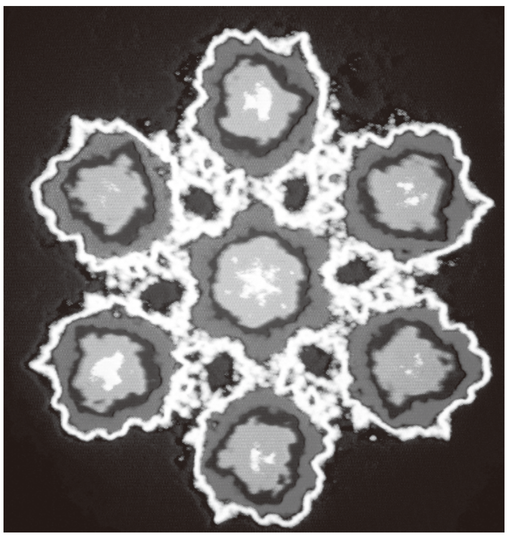


图 3.2　原子

人们在对物质的无限可分性争论了几个世纪以后，今天的物理学家承认了物质的不连续性。如果说，技术已经能让我们“看见”原子，我们还需在更深层次，即基本粒子级别上去探究构成原子的基石（见彩图）。

图片来源：© STEM image of uranium atoms/Dr.Mitsuo Ohtsuki/Science Photo Library.

然而，随着无穷的贸然出现，卢瑟福的模型牵涉到一个基本问题。受原子核的吸引，电子实际上在加速运动，根据经典理论，电子在加速的同时还在释放能量。最终，电子会减速，并向着中心核的方向呈螺旋状坍缩，整个过程不超过十亿分之一秒。那么，卢瑟福模型中的原子应该是不稳定的，但人们已确定原子其实是稳定的。

从原子到核子

原子虽然很小，却不是无穷小。它的直径大约在 10^{-10} 米，我们可以通过一个简单的实验来证实其大小：油平铺在水面上的厚度即为一个分子的直径。借助扫描隧道显微镜，物理学家观察到了原子。他们看到了什么呢？一些非常小的小球，一亿个这样的小球并在一起才有 1 厘米厚……19 世纪末，物理学家证实了原子可以被分割成更小的结构：原子核与电子云。电子云的大小限制了原子的大小，但电子云的质量不足原子密度的千分之一。比如，氢原子的原子核质量是其电子的 1840 倍。氢原子的原子核只包含一种粒子，即质子。其他原子既包含质子也包含中子——中子是中性粒子，其质量与质子相似。质子和中子，合称核子，两者是紧密连接，因为它们之间有强烈的相互作用，而相互作用只在极短距离内才能发生，即 10^{-15} 米的距离（十亿分之一米的百万分之一）。这也就是核子直径的估算值。

为了避免这个问题，丹麦物理学家尼尔斯 · 玻尔于 1913 年发表了文章《关于原子和分子的构成》。根据他的原子论，电子在原子核周围不能随意分布，只能分布在轨道上。因此，经典理论中所说的持续性放射并没有发生，因而后续的一系列问题也就不存在。这样

一来，我们就可以理解原子的稳定性了。另外，这种假说还解释了原子其他未知的性质，如光谱，也就是说，原子可能放射或接收的光的频率分布。就这样，玻尔将普朗克于 1900 年和爱因斯坦于 1905 年提出的假设一并融合。根据这两人的假设，能量是可以被量化的。这些研究成果尽管仍不完整，但仍开启了通往量子物理学的大门。

黑体与无穷

人们在计算黑体的过程中也遇到了无穷，为开启认识物质的新视角——量子物理学——创造了决定性因素。所谓“黑体”是释放和接收电子辐射的所有物体的理想化模型，比如因放射光线而变红的金属。事实上，射线交换发生在原子和持续振荡的电子层面。问题在于如何从物质反应的温度出发，衍生出射线光谱，也就是光的频率分布。然而，统计热力学运算却导致了令人不快的无穷：以射线形式发射的能量会根据放射频率无限上升。因此这个量是无穷的，但这是实验无法接受的结论，与实验结果恰恰相反。

这一问题被称为“紫外灾难”，为了解决问题、调和矛盾，普朗克在 1900 年提出了一个假设：在射线与物质之间只能靠一种不持续的物体交换能量，即量子。有了这一假说，新计算避免了发散，计算结果与实验结果也相吻合。

研究以彻底去除了无穷而完美告终。然而，普朗克并不知道如何阐述自己的假说，只能用万不得已的方法去解释。后来，这个假说奠基了量子理论，而量子理论为黑体的无穷难题提供了最终的解答。但是，如同广义相对论一样，20 世纪这一第二大科学革命也引发了新的无穷。

量子场

“一粒沙里见世界，一朵花里见天国；手掌中握住无限，一刹那便是永恒。”

——威廉·布莱克，《天真的预兆》（1803）

无穷大与时间、空间的相关问题主要属于广义相对论范畴。无穷小与物质、辐射及其之间的互相影响的问题，主要属于量子物理学范畴。现在，量子物理学的描述基本停留在不变、无穷的牛顿空间中，或是在狭义相对论的时空中，又称“闵可夫斯基时空”或“庞加莱－闵可夫斯基时空”。但是，量子物理学没有考虑引力，也不接受任何特别的空间角度：现阶段还无法将广义相对论取得的进展引入到量子描述中，反之亦然。所幸，大多数涉及量子物理学的情况仅牵扯有限的层面，即较弱的引力场。唯一的例外是黑洞底部和普朗克宇宙时间（见第 4 章）。

今天，我们对所有物质的描述都从量子角度出发。最终，量子场论解释了一切（下面会讲到）。量子场论是由保罗·狄拉克在 20 世纪 30 至 40 年代创立的，当时还称为量子电动力学，后来沃纳·海森堡和沃尔夫冈·泡利又进行了发展。量子场论研究的是最简单的情况，即电子与光子的相互作用。它将物质（质子、电子等）和辐射（光子）同等对待，所有物质或相互作用都用量子场来描述。

20 世纪 30 年代，量子力学几乎成型，但仍处在牛顿时空中，与爱因斯坦的相对论不相符。狄拉克让量子物理学与狭义相对论中时

空概念相调和，由此收获了意想不到的成果。首先，这促使了量子电动力学，即电子学的量子论的诞生——这才是狄拉克的初衷，但其研究成果却没有止步于此，而是一举成就了量子场论。狄拉克无心插柳，偶然引入两个全新概念——旋量与反物质，却引发了巨大的成就。

量子场论也催生了量子空的概念——它自产生以来就令人费解。并且，量子空理论也遇到了许多无穷的难题。对此，我们只能从数学角度给出一些貌似“答非所问”的答案，并将试着描述其重要性（见“重正化物质”）。

空

> “若其实，则理在气中，气无非理，气在空中，空无非气，通一而无二者也。”
>
> ——王夫之（1619—1692）

量子物理学用量子场来解释一切实体，无论是物质、辐射还是相互作用。如此描述下的物体与经典物理学中的对象——粒子或波的性质就大不相同了。首先，量子场必然遍布全空间，只谈论局部某一个地方的量子场是没有意义的。量子场从根本上占据了整个空间——只能这样认为。此外，场是由其“态”来定义的。比如说，有一些态的能量比较高，有一些态包含更多的粒子，有一些态在空间中的位置有差别，等等。

量子场论最根本的创新之处在于：在一个既定场中，即使是一个定义明确的场，其粒子数量也不总是固定的。正是因为这一点

（当然还有其他原因），量子场论禁止刻板地对物质进行纯微粒化描述。由此可见，粒子是经典物理学的概念，而非量子物理学的概念。另外，在所有可想象的场态中，有一种场（有时是几种场）的能量是最小的。我们称之为“基本态”或者“量子真空”，尽管这个术语并不恰当：实际上，这种“真空”和“空无一物”是不同的。量子真空的能量最小，但并不一定是零。这也是一种包含了特定数量粒子的状态，比如零粒子。

另外，根据量子物理学中“海森堡不确定性原理”，所有能观察到的事物似乎都是变化不定的。有一种解说认为，事物的“本质”变化不定：凡是能够被测量的和试图以经典理论阐述的事物似乎都是不确定的。我们对此存疑。真空也不例外，也是起伏变化的。有时，我们会用一种更形象的方式来表述真空：在很短的时间 Δt 内，“吸取”ΔE 的能量就能形成“虚粒子”；吸取能量的时间越长，得到的能量就越弱。Δt 和 ΔE 通过一种“不确定关系”联在一起。从一片虚空中喷射出一些粒子，昙花一现后又重归寂无。

就这样，大量粒子短暂存在后又湮没殆尽，这无休止的活动就发生在真空之中。尽管如此，我们并不能探测到这些粒子。这些生于空又归于空的粒子被认为是“虚拟的”。真空并不是死寂一片、毫无特征，虚粒子在其中蒸腾、发酵，波动的能量和生机不断振颤着。

与真空相对的状态是“受激”。根据通常的原理，我们将相对基本态而言的激发态理解为粒子的产生，比如电子的产生。但是，这种激烈活动的背景一直存在。其实，电子在一片错综复杂的虚粒子海中移动，粒子海中有各种各样的粒子，如其他电子、光子、夸克、轻子等。电子的出现扰乱了真空的活动，这种畸变反过来也作用于

电子本身[①]。这些都使量子描述变得极其复杂，因为在描述时需要将所有现象都考虑在内（图 3.3）。

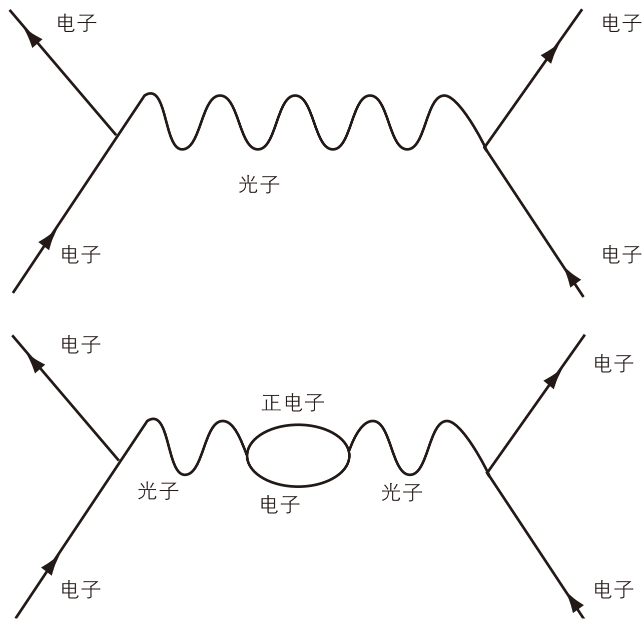


图 3.3　费曼图

当两个粒子（图 3.3 中为来自下方的两个电子）互相作用，可以“简单”地交换一个光子（上图）。这个光子在整个过程中先物化再非物化。在下图中，光子变成了一对“电子 – 正电子”，而后又变成了一个光子。如果将这种奇妙的过程考虑在内，那么我们描述两个始发电子间相互作用的方法就和从前大不相同了。但这只不过是“第一次修正”。事实上，有可能还存在更复杂的历程，需要进行两次、三次、四次甚至更多次修正。量子物理学中最小的一次运算也要将所有这些无尽的修正考虑在内。这一巨大的困难促使人们在量子物理学中引入“重正化”的概念。

① 特别是借助希格斯场。

不过，千变万化、犹如虚幻的相互作用也意味着存在无穷的能量。最简单的例子就是两个粒子，比如说互相交换光子的两个电子。当电子发射与接收光子时，光子在从一个电子抵达另一个电子的路途中会与其他粒子发生相互作用。这表现为光子变成了一对“电子–正电子”；新组合中的粒子又可以互换虚光子，而后再生成一个新光子，这时原先的光子便湮没了，而这个新光子会被接收电子吸收。

这仅仅是一个例子，各种可能性是无穷无尽的。不同类型的虚粒子之间错综复杂的粒子交换编织成网，一些虚粒子在混乱、涨落的能量中进进出出，不断产生和湮灭。情况无比复杂，似乎在故意挑战人们的认知与运算能力。比如，当我们试图计算一个电子的能量时，直接计算会得到一个无穷的值。在这片真空活动激发的粒子海中，电子被包围在一张能量分布不均的网中。计算要把一切都考虑在内。可是计算表明，在虚粒子的外壳中所发生的相互作用在靠近电子时会无限增强。这下问题严重了，因为这说明我们唯一能估算的电子能量也是无穷的。即使我们想承认情况确实如此，也要立即打消这个念头。根据相对论，能量来源于质量，这样一来，电子的质量就会变成无限大，而这与实验相违背……

因此，需要找到一个折中的办法。电子的出现证明与其相对的场处于激发状态，设为 F_1。计算赋予该状态一个无穷的能量值。但我们可以将这个状态（带一个电子的场态）与真空状态 F_0 相对比。所谓“电子能量”并不是场 F_1 状态的无穷能量，而是 F_1 的能量（无穷的）和 F_0 的能量（也是无穷的）之差。我们注意到，非量子物理学领域也遇到了一个类似问题：电子被视为一个特殊的粒子，它在自己创造的场中带有无穷能量。如果我们不再认为电子是点状的，就会回到量子物理学中，回到上述问题上。

重正化物质

量子场论的方程式计算也出现了无穷大，称为“散度”。20 世纪 40 年代末，朝永振一郎、朱利安 · 施温格和理查德 · 费曼进行了诸多研究，终于澄清了问题的性质。物理学家没能成功地解决问题，却成功地找到了“跳过”问题的方法——这就是重正化理论。我们可能不知道电子真正的能量或质量，但我们不再追求真相，而仅着眼于能够计算电子“重正化质量”的过程。多亏了重正化理论，我们可以利用一个绝妙的调整量来计算任意一个可测量。

下面就是让人们摆脱无穷的物理学思想。假设我们可以将电子与其电荷分离，也就是与电子场及其相关能量分离。我们给这个与电子场剥离的“赤裸”电子赋加一个无穷大的质量；对电荷，我们也赋予一个无穷大的能量。但实际上，我们永远不可能观察到一个不带场的电子。于是，我们需要考虑它的净质量值（无穷）加上电荷带的电磁场上所具有的负无穷能量（要记得质量和能量是等值的）。精妙之处在于，物质可以自行解决问题，方法就是这两种无穷之间的差是有穷的。在实际中，我们不可能“消灭”电荷，即使唯一可测量的量就是这个有穷的值。无穷永远在那里，但从中剥除了可观测量，一些简单的计算中间量。这就重新回到了之前的方法：改变参考面来计算质量或能量；或者也可以不计算能量，而是计算能量差——这有点像从地面计算飞机的飞行高度而不是从海平面算起。换言之，量子物理学只着眼于能量差，而不是能量本身。“数学戏法”解决了无穷电子的描述，否则理论就会变得混乱不堪。例如，我们知道了是能量差而不是能量，施加了引力影响（见后文）。

基本粒子是点状的吗？

原则上来讲，任何物理模型都不应牵扯无穷。然而，无穷小在粒子物理学中无处不在。物理学家有足够的理由相信基本粒子是点状的、无穷小的。他们也是逐步才得出这一结论。从经典物理学原理限定的宏观尺度量级出发，物理学家们一个台阶、一个台阶地下到了最小尺度量级，直至量子领域：起初是原子，然后是核子，再后是亚核子。各个量级令物理学家们发现了越来越惊人的性质。在小于 10^{-13} 米的尺度上所发生的一切似乎说明相互作用的粒子是无穷小的。于是，物理学家们构建了一些基于假说的理论，比如，这些粒子——电子与夸克——都是点状的，而且它们的相互作用也具有点状性质。这个假说从一问世就引发了诸多技术性问题。而这些问题需要重正化来解决：第一个建立在重正化基础上的理论是量子电动力学，它描述了电子和光子之间的相互作用，成为物理学家构建的最精确的理论！物理学家们受到成功的鼓舞，于是又根据相同模型构建了其他理论，来描述其他的相互作用。他们得到了“标准模型”，该模型成功地将所谓重子物质中所有粒子间的相互作用都考虑在内[①]。但是基本粒子真的是点状的吗？

① 另一方面，构成非重子暗物质的粒子可能占我们宇宙当前能量的近三分之一，它们并没有用标准模型来描述，这激发了人们对“超标准模型”进行大量研究工作，如超对称、量子引力等。

其他相互作用也经过了类似的重正化，比如说核子之间的强相互作用和弱相互作用。这两种作用影响着原子核中粒子间行为和核反应。量从零（无穷）到有值（有穷），这中间的所有转化被统称为“重正化群”。实际上，除了高能物理学之外，这个概念在大部分涉及无穷小的学科中都有着广泛的应用领域。

重正化避免了无穷，调和了理论的纷争，故而大获成功。无穷不但没有推翻这个理论，反而将之深化。然而，重正化理论尽管在数学上很严谨，却仍像是在耍花招，很难在概念层面去证实。另外，它只适用于描述电磁强相互作用、弱相互作用这类粒子物理学“标准模型”，却无法用在引力上。因此，需要在物理学领域中探索、发展其他道路。

希格斯玻色子

在迪拉克之后，场的量子理论变成了一种理论框架，从中发展出了粒子物理学。人们通过一个根本性变革，构建了粒子物理学的标准模型，描述构成物质世界的基本粒子。这里不得不提到“规范理论”概念。这个概念最初是由数学家外尔引入的。理论没有太过纠结于技术细节，而是让“规范对称性”做了主角。与“常规对称性”（就倒数、移动、自旋而言）相反，规范对称性并不应用于常规的空间或时空，而是应用于与不同类型粒子联系在一起的抽象空间（或内部空间）。其实，粒子类是粒子特征值的集合，粒子类与空间性质类似，所以被称为“内部空间”。这是抽象空间和对称性所引入的现代场论的根本特征之一。

第一个空场量子理论——量子电动力理论如同理论标尺一样，

它还构建了电动力模型。电动力相互作用的介质——光子就是“规范玻色子”。后来在 1967 年，美国物理学家史蒂文·温伯格在可接受的限度内放宽了对弱核相互作用（核裂变的主因）的描述规范。20 世纪 80 年代，欧洲核子研究组织发现了与之对应的规范玻色子。规范理论因而成了场论的基本框架。

但是自 1960 年起，物理学家们发现了一个问题：规范理论的原始版本预言了相互作用的粒子（规范玻色子）质量为零，这又是一个无穷！对光子来说，这没有问题，我们知道光子的质量实际为零，但光子并不适合来描述其他相互作用。就这一点，彼得·希格斯以及弗朗索瓦·恩格勒和罗伯特·布罗特分别从两个角度着手，证明假设存在一个附加场，那么问题就迎刃而解了。假设的“希格斯–恩格勒–布罗特场”通常简称为“希格斯场”，就这样作为一个必要因素纳入标准模式中。尽管人们并不能证明它真的存在。

和其他所有物理场一样，希格斯场在宇宙中也应该是无处不在的。希格斯场与夸克场、轻子场等场的互动方式令这些场表现得如同具有质量一样。在这种意义上，是希格斯场“赋予”了这些场“质量”。

“标准模型”就是建立在这个假说之上。几十年来，物理学家们一直在寻找能直接证明假说的办法。如何才能观察到希格斯场的表现？至少从表面上来看，答案很简单——激发它，也就是说凸显对应的粒子，即希格斯玻色子。几十亿年来，宇宙温度都太低，不够为希格斯玻色子提供庇护，换句话说，不能激发希格斯玻色子。于是，“制造”希格斯玻色子就成了欧洲核子研究组织建造大型强子对撞机（LHC）的首要动机。大型强子对撞机的工作原理是制造十分激烈的夸克撞击——这是加速的目的。这时，某些夸克应该能生成

研究所需的玻色子，或者激发场。然而，玻色子一旦生成后，在不足一秒的极短时间内就会裂变。时间太短，我们甚至来不及“观察”它。我们只能在撞击生成的万千粒子中寻找玻色子裂变的迹象。这又是一个新难题：我们不知道自己到底在寻找什么，因为理论并没有明确玻色子的精确质量。尽管如此，在 2012 年夏天，这台巨型机器成功探测到一种特征鲜明的粒子，它就是万众期待的玻色子，质量为 126 吉电子伏（GeV）。预言希格斯粒子的恩格勒和希格斯分享了 2013 年的诺贝尔物理学奖，而布罗特当时已经去世。这里澄清一个常见的误会：请大家注意，希格斯场才是粒子质量的源头，而不是它的激化物——希格斯玻色子。

暗能量？

与量子场相关的诸多问题深刻影响了宇宙学，特别是“暗能量”问题。为了解释宇宙膨胀的加速（见“到底是有穷，还是无穷？”），有人想要引入一个“神秘能量”的影响力。他们认为宇宙处于某种量子态，其“能量”——而不是“其与真空态的能量差”——施加了一种反引力影响，能引起可观测的宇宙加速。但我们已经看到，计算结果显示这种能量有一个无穷值。因此，我们应该跳出熟知的量子场理论，设象一个能将无穷值转化为有穷值的过程，但已知物理学无法描述这种过程。问题在于，即便不知道具体过程，但对量级的估测结果已经表明，这种能量可能太过巨大（一般认为量级在 10^{120}），根本无法观测。有时人们称之为“宇宙常数问题”。但这里有一个不合逻辑的地方：采用这个宇宙常数解释宇宙加速膨胀不会引发任何量级上的问题。在第 1 章提到过的宇宙暴胀模型中，也会

涉及真空能量或某一量子态的绝对能量。

暗能量或暴胀理论又面临新的问题。虽然实验已证实了量子场理论，但它只能应用在狭义相对论框架内，也就是在闵可夫斯基时空模型中——这是一个没有时空曲率、没有引力的时空。我们完全不知道，如果出现了引力，这一理论会变成什么样子，特别是当涉及与能量和质量相关的问题时。显然，暗能量和暴胀理论遇到的困难恰恰反应了这个难题！

超弦理论

基础物理学中有两个相对立的概念：一个是标准模型，量子理论和点状粒子间的局部相互作用；另一个是广义相对论，引力源自时空弯曲。这该怎么办呢？要将广义相对论视为有待确立的量子经典理论的某一个侧面吗？如此一来，这种量子引力理论同时又是一种时空量子理论。然而，标准模型和物理理论是建立在持续的时空观念之上的。任何对基础观念的更改都可能动摇整个理论体系。尽管如此，在不足 10^{-35} 米的距离内（人们称之为“普朗克长度”），量子理论造成的不确定性很可能扰乱时空结构。如何扰乱呢？我们并不知道。

有些理论学家认为，物质的根本构成，即夸克、轻子和玻色子，不是呈现零维的点状，而是细长、颤动、一维的“超弦”。超弦是一种线状的微小结构，没有点状粒子那么奇特，更利于构建引力量子学。弦颤动着，并以某种方式盘绕，我们可以视其为一种粒子。在引力的情况中，弦是线性引力的矢量，弦可以是闭合的；而在其他空间中，弦是开放的。粒子间相互作用可以通过开放或闭合的弦的

连接或分裂来描述。

但是，要达成完美的大统一必须付出一些代价：原本用三维来描述的时空不得不附加六七个“空间”维度。扩大了的时空框架能帮助我们解决一些无穷的难题。然而，在日常生活中，我们看不到其他空间维度，也看不到基本物质的线状特征。许多不同版本的超弦理论用不同方式解释上述问题。在某些版本中，“多出来”的维度可能是“相互重叠的”，其折痕厚度接近普朗克长度，因而我们完全看不到它们。

一个浇水管具有一个长度（第一维）和两个附加维度（直径）。但由于两者差别太大，因而从远处看，我们可将之视作一条厚度忽略不计的线，如同一条一维中的线。两个附加维度（它们让水在管子中流淌）只有在距离很近的地方才能看到。同样，宇宙隐藏的维度也可能就在某处，只是太小了，我们看不见。

无穷就这么消失了？

假如说量子理论中出现了无穷，那是因为计算能量时引入了量级极小的相互作用：我们越靠近某种辐射源，场就越密，能量就大至无穷。而我们也没有理由仅仅盯着无穷小，因为空间没有尽头。分歧就是这样出现的。

但是，如果量级很小的空间结构不持续，而呈颗粒状，就像某些量子引力学观点所假设的那样，那么能量计算就应该止步于某种量级，即“断点”。积分将会收敛，也就是具有有限值。弦理论中就发生过这样的事情：弦的维度不为零（比如是普朗克长度），构成了一个断点。其他量子引力学派，如圈量子引力和非对易几何学，也

在时空中引入了断点（见第 4 章）。

颗粒状时空有一个巨大的好处，它为引力的量子描述开辟了道路。这种相互作用不能重正化的问题不再是一个障碍。在最后一章里，我们将简短描述在某些量子引力学理论中，这种描述方法是如何飞跃发展的。

第 4 章

独特的量子引力

“正是我们，这些同被神性所支配的人在幻想宇宙。我们想象它是坚固的、神秘的、可见的，遍及四方，亘古不变。但是，我们又承认在宇宙中永远存在一些不合常理之处，展示着它的荒谬。”

——博尔赫斯，《乌龟的变形》

无底洞

黑洞是相对论和量子力学共同创造的“混血儿”，为许多无穷难题提供了解答。

黑洞的诞生可以追溯到 18 世纪末。天文学家约翰·米歇尔和皮埃尔－西蒙·德·拉普拉斯提出，“黑洞”是一个极其致密的天体，引力场极大，任何物质和射线都无法从中逃离。由于连光线都无法逃脱，所以这种天体是不可见的。为了实现这种条件，天体的半径要低于一个标准值，我们今天称之为“史瓦西半径”：像太阳这样的大质量天体，其史瓦西半径是 3 千米；而对于和地球一般大的天体而言，其史瓦西半径只有 1 厘米。这样一来，想要成为一个黑洞，

天体中的物质必须非常致密。

广义相对论为黑洞提供了理论基石。1915 年，爱因斯坦发表一系列奠基性论文仅一个月后，卡尔・史瓦西就在相对论理论框架下发现了一个解，用来描述被真空包裹着的球状物体的引力场。时空几何能够完美地应用于太阳系这样的引力场——太阳是球体，而与之相比，太阳系其余部分的密度太小，可被视为真空。但是，史瓦西解的意义远不止于此：它不是由相关天体的性质来决定的，而仅仅是由天体密度来决定的。于是，史瓦西解就可以运用在密度极大的物体（引力源）上，在最极端的情况下，该物体甚至可以是一个点。这就是“相对论版本”的黑洞。

■ 一条奇特的视界

相对论黑洞有诸多特点，都来自史瓦西半径表面的奇怪性质。这个表面如同黑洞的边界，让黑洞变成一个封闭系统，成了几乎与我们的世界相隔绝的另一个世界。实际上，从史瓦西半径表面，更准确地说，是从其内部放射出的物质——特别是光线，永远不可能“离开”：所有可能的传播方向都指向引力场中心。这一表面就像陷阱一样，将光完全监禁起来，被称为“事件视界”：在这一时空边界以内所发生的任何事件都不可见。

我们在“宇宙视界”一节花了大量篇幅来讨论宇宙视界问题。黑洞视界和我们星球的弧度所造成的地平线十分类似，在海上航行的人看不到这条假想的边界以外的地方。黑洞视界是一条“虚构的”时空边界，而地平线则是“相对的”：以航海者为中心的圆圈随着航行不断移动——还记得吗？布鲁诺正是通过地平线的相对性证明了宇宙的无限性。相反，黑洞视界是“绝对的”，它独立于所有观察

者，分割了时空，也就是将所有事件分割成两部分。外部区域构成了通常的宇宙，在这里，我们可以通过光信号进行“正常”交流；而在内部区域，所有光线都向心传播，广义相对论指出，事件的连通必须符合严格的制约条件。

事件视界就像是一道膜，物质和光线只能朝一个方向通过，不可能返回。然而，这只是一个没有物质实体的几何概念。在某些条件下，宇航员可以穿过这个非物质表面去探索黑洞内部。然而，他永远不可能从黑洞出来，宣布自己的发现。

■ 黑洞的假无穷

相对论中的黑洞引发了某些物理和几何量值的无穷性，同样制造了不少难题。

首先，问题出现在黑洞视界的时空几何中，如果黑洞自转，那么其表面应该呈球状或者两端略扁平。但史瓦西解指出，在黑洞表面上，时空特性变得“病态”。尺子可以测量长度，时钟可以计算时长，但当它们靠近黑洞表面时都变得异常：长度消失了，时间却无限延长。亚瑟·爱丁顿总结道：“有一个神奇的圆圈，我们在其中无法做任何测量。”

这个问题在很长一段时间内都是众人热议的对象，人们曾认为它是广义相对论的不合理之处。不过，乔治·勒梅特在 1933 年发表了一篇著名的论文，首次提出黑洞表面不是一个真正的奇点：如果说在这里出现了无穷，那是因为我们选错了坐标系。为了证明自己的观点，勒梅特构建了一个对等的坐标系，临界半径的“奇妙效应”消失了：视界的无穷是“假无穷”，完全是人为设定的，没有任何反常的物理现象与之对应。

不幸的是，勒梅特的观点没有立刻引起人们的关注。他将这一观点隐藏在一篇讨论背景更广阔的宇宙学论文中，而没有将之用英语单独发表。黑洞的相对论理论在长达 30 年中处于停滞状态。直到 20 世纪 60 年代，史瓦西奇点的“人为性质”才再次被发现。从那时候起，各种奇妙的黑洞相对论模型开始迅猛发展。如今，人类在宇宙中探测到许多黑洞，从恒星到巨星，其中有些黑洞是间接探测到的（图 4.1），有些则是借助引力波直接探测到的[①]。

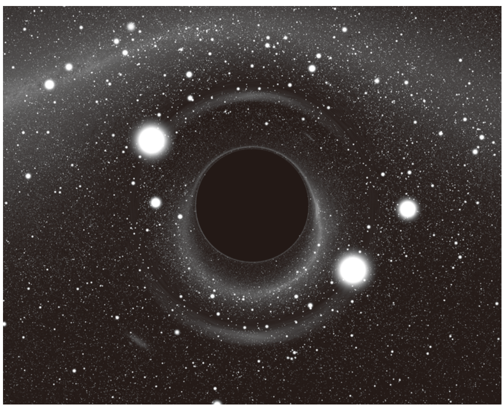


图 4.1　黑洞造成光的扭曲

这幅图像由计算机计算、绘制，表现了黑洞造成的光的扭曲。每颗恒星至少有两个不同的图像，一个在黑洞外，一个在黑洞内。理论上讲，在黑洞的影响下，同一颗恒星可以有无数图像，但大部分都是不可观测的。在距离黑洞表面（事件视界）很近的地方，整个穹幕都被复制成两份，呈现出一副极度扭曲的图像（见彩图）。
图片来源：© Alain Riazuelo/CNRS/IAP

① 关于引力波的更多知识，请参阅《追踪引力波：寻找时空的涟漪》（人民邮电出版社，2017 年）。——编者按

还有一些其他特性表现在临界半径上。我们不可能观察到黑洞，但黑洞周边的时空弯曲却实实在在。从非常靠近视界的地方发射光线，光线被我们接收时会展现出最接近黑洞的图景，就在黑洞外沿。黑洞产生的巨大引力造成了时间扭曲：发光点越接近视界，光到达我们的时间就越长。在极端情况下，从视界发出的光线要经历无限长时间才能到达我们，这不过是“光永远不会到达”的另一种说法罢了。

从遥远的观察者角度来看，一个恒星的坍缩过程被无限放慢。在实际中以正常速度运行的现象也会看起来很缓慢，时间甚至被短暂“冻结”。广义相对论就此提出了一个著名的预言：时间的弹性。对于两个不同的观察者来说，时间的流逝似乎是不同的。对于独立于现象的观察者来说，他在远处用时钟测量出的时长与现象的时长不同，我们称之为“表观时间”。根据广义相对论，有多少个外部观察者，就有多少不同的表观时间。相反，该现象的“固有时间”，也就是用处于现象之中的时钟测量出的时长，是绝对、唯一的。

无论是恒星坍缩还是黑洞形成，现象都十分激烈。虽然固有时间绝对是有限的，但表观时间却是无穷的。

■ 黑洞的真无穷

视界的无穷让一些事件不可见，但这并没有给物理学造成特别的难题。

然而，当我们探索黑洞“内部”时，情况就变得更复杂了（图 4.2）。需要指出的是，黑洞是一个动态现象，而不是一个实体：这是不可阻止的引力坍缩，凭谁也不能保持静止；所有粒子和光线的轨道都被无情地卷向中心汇聚。于是，这个中心看起来像是一个很奇特的点，

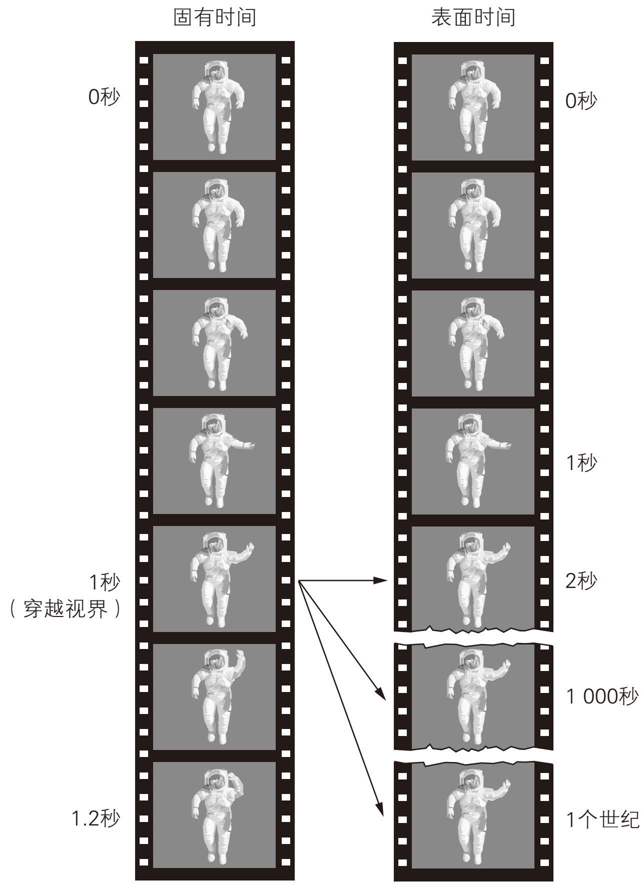


图 4.2　黑洞的时间冻结

一个宇航员决定探索黑洞内部。在消失之前，他向人类最后一次挥手告别。一台安置在黑洞边缘的摄像机拍摄着一切，并向轨道太空站发送图像。左侧的胶片展现的是探险者的实时经历（固有时间）。在致意过程中，宇航员毫无意识地跨越了黑洞的界限（视界），而在 1.2 秒后，他在黑洞底部（奇点）结束挥手致意。右边的胶片表现了太空站上看到的画面（表面时间）。起初，两个影片是同步的，然后，右边的影片似乎无限延伸了，仿佛宇航员永远定格在告别的一刻，致意的时间无限长。

物理学家们称之为时空的奇点。在这里，物质和曲率都被无限压缩！

奇点有着特殊的意义：它是向黑洞坠落的所有粒子的终点，比如一艘穿越视界、做自由落体运动的宇宙飞船。对飞船来说，从穿越视界到在中心奇点粉碎，整个过程的时长是有限的固有时间。在 10 倍太阳质量的黑洞内，飞船在奇点毁灭之前的固有存活时间不超过万分之一秒。而在某个隐藏于星系中的超大质量黑洞里，存活时间可能持续 1 小时。黑洞奇点就像一个时空边界，它标志着“时间的终点”，所有黑洞探险者都不再有未来。于是悖论出现了：奇点带来的其实是时间的有穷性，而非无穷性！

同时，奇点被无穷的曲率限定。曲率，原本一个真实、可测的量，有了一个无穷值。

■ 被“遮挡”的无穷

物理学家们不禁要问：难道就不能避开让物理量变得无穷、不可测的奇点吗？至少在广义相对论的框架下，答案是否定的：20 世纪 60 年代末，英国物理学家史蒂芬 · 霍金和罗杰 · 彭罗斯证明，在引力场坍缩过程中，奇点的出现不可避免。因此，奇点并不是一个数学把戏。相反，奇点是广义相对论必不可少的一部分，是引力吸引性和自加速的必然结果。

恒星的引力坍缩在奇点处终结，最后有生成黑洞或不生成黑洞这两种变化。假如形成黑洞，事件视界会隐藏一切发生在黑洞内部的事件，包括物质最终在奇点处粉碎——这一点被“遮挡”了。对于生活在黑洞外的物理学家来说，无论奇点和无穷性有没有形成都不得而知了，视界阻挡了一切。自然的法则和意义在黑洞内或许都

被打破了，但物理学家对此将永远一无所知……

假设黑洞视界没有遮挡奇点，我们也许能设想一下奇点的样子。可是，一切也无法进行下去。这种奇点被称为“孤立”奇点，没什么能阻止粒子和光从中逃脱。粒子和光或许跨越了很长一段距离，最终扰乱整个物理系统，让所有计算和预言都失去效力。这将是科学界的毁灭，在“孤立”奇点任意妄为的影响下，已知和实验室已证的物理学原理在旦夕间将失去意义！孤立奇点永远都不会在宇宙中被观测到，但这并不能证明它们不存在。

彭罗斯曾提出一个假说，来自宇宙的“遮挡”会避免尴尬局面：大自然会禁止孤立奇点的出现，视界应该永远“包裹”奇点。这个猜测貌似一本正经，却永远不能在相对论框架下被严谨地证明。人们通常认为，这个假说在最简单的情况下为真，比如近球形对称情况。但在更极端的情况下，问题完全没有定论。

■ 被放弃的无穷

即使宇宙遮挡是真的，引力中的所有异常问题也并非都能找到解答。宇宙中可能存在其他类型的奇点，隐藏在自转的黑洞尽头。它们可能会造成一些怪异现象，比如一条通向“其他宇宙”的通道，或者实现一次返回过去的旅行。真正的问题不在于确认奇点是否会有恶劣影响，而在于它们在宇宙中是否真实存在。换言之，预言了这种无穷体系的广义相对论是否总是正确的呢？

科学界曾多次诞生涉及无穷的物理理论。但当理论更完整、适用范围更广阔时，无穷就消失了。就算广义相对论是“当下”最好的引力理论，但也表现出一些不完整的地方。实际上，该理论与量子物理学原理不相符。量子物理学是现代科学的第二块基石，支配

着微观世界的演变，比如被放置在弱相互作用（电磁、核）之下的基本粒子。有些测量结果无法用概率计算，量子物理学对此给出一种“模糊”的描述，某些解释甚至与人们的普遍认知相左。但从 20 世纪诞生以来，量子物理学对真实世界的描述已经非常精准，更不用说如镭射、晶体管、计算机等各种理论和技术成果。但在天文学量级上，量子效应几乎不起作用。我们可以借助“经典”物理学，特别是广义相对论描述的引力。然而，奇点现象突然将无穷小问题带入了相对论。奇点现象展现了微观量级上的时空结构，让两种理论互不相容。普朗克长度（10^{-35} 米级）很可能是我们能将时空视为“平滑”的最小尺度，是运用物理学和经典相对论的最低限度。超过这个限度，我们所不了解的量子效应很可能会改变时空的结构。20 世纪初，因设计了元素周期表而闻名世界的化学家门捷列夫曾假设，时空结构可能不是连续的，而是呈颗粒状，就像物质和能量那样。门捷列夫还曾经提出，空间是由比氢原子小一百万倍的粒子构成的。

因此，我们可以将普朗克量级解释为“微观视界”，其后隐藏着奇点的无穷引力。这当然不是一个完美的答案：这个视界只不过是我们“无知”的界限罢了。

时间的起点

时间的无穷与空间的无穷不同。我们可以直观地观察到宇宙膨胀，它表现为宇宙距离随时间增长。在量上，我们借助与时间相关的宇宙长度标准——宇宙标度因子 $R(t)$：一切膨胀的宇宙模型，比如，遥远星系与银河系的距离或是空间的直径（如果空间有限的话），其尺度都与 $R(t)$ 成比例增长。关于时间的有限性，问题都十分

精确：宇宙时间 t 从过去一直延伸到无穷吗？还是说有一个有限期？如果问题更专业一些，宇宙学家会问：是否存在一个时刻，标度因子和所有宇宙长度的值都为零？

根据相对论，答案取决于宇宙的内容。如果说，宇宙的组成成分和我们熟知的物质或射线的性质一样，那么标度因子 R 必将随时间流逝而减小，也必定存在一个时刻 t_0，$R(t_0)$ 为零。有限时长 $t_U=t_{今天}-t_0$ 代表的就是“宇宙的年龄”。这就是大爆炸原始理论模型提出的理论：宇宙膨胀仅在一段有限时间内发生。

根据这些模型，宇宙历史存在一个最小时间 t_0（有时称为“零点”）。根据计算和观测，零点距现在有 138.1 亿年。显然，t_0 时刻前的时间都被排除在考虑范围之外，这意味着不存在任何年龄超过 t_U，即 138.1 亿岁以上的物体。因此，没有任何一个时钟能测量比这更长的时间了。于是，时间有了一个有穷的界限（在这种情况下，界限在过去）。别忘了，目前测量到的恒星寿命精准地分布在 0 到 130 亿年之间。这一观测结果本身就是大爆炸模型的有力证据。不过，大爆炸模型也有大量其他证据来证实。

有限时间的威胁

与空间的有限性相反，时间的有限性似乎比无穷性更让人恐慌。原因有二。第一个恐慌的原因是过去时间的界限形同一个奇点，就像黑洞一样。我们之后会讲到该如何看待这一问题。空间的有限性曾遇到过边界问题，直到引入非欧几何和拓扑学才得以解决。第二个原因不是物理问题：过去时间的有限性与“宇宙亘古不变”这一执念发生了冲突。为此，有人宁愿摒弃过去时间的有限性，而相信

时间是无限的。

继勒梅特的研究之后，人们首先采取的解决之道是引入宇宙常数 Λ。这个常数很重要，我们借此可以假设一些宇宙模型。根据这些模型，宇宙膨胀能从一个极其久远时刻延续至今，甚至直至无穷。对于一些恰当的 Λ 值，广义相对论方程的解不需要引入任何过去奇点：有人认为，自过去某一无限遥远的时刻起，宇宙首先是收缩的；之后，宇宙可能经历了一个没有奇点的阶段，挤压到最小；最终，宇宙才进入到现在这种膨胀状态，并会无限期地延续下去。

最近的观测推翻了这些模型。自 1931 年起，勒梅特就提出了一些过去时间有限，而且具有原始奇点的宇宙模型。有人抨击它是“调和主义”，受到了宗教的影响。实际上，大爆炸理论描述的宇宙在原始阶段热度极高、密度极大，而且充满了辐射。反对者称，它让人想起《圣经 · 创世纪》中的“要有光”。但是，勒梅特进行了激烈的辩护，为自己提出的“原始原子”概念的科学性正名，结果反而让反对者，如英国天文学家弗雷德 · 霍伊尔，陷入了困窘。恰恰是霍伊尔提出了绝妙反语“大爆炸”——“大爆炸”根本不是一声巨大的爆裂声！霍伊尔的本意是对该理论好好嘲笑一番，但这个词却永远留存了下来。

爱因斯坦本人也反对大爆炸理论，他也说：“不，这太容易让人联想到《创世纪》了。”爱丁顿觉得这个概念很恐怖。1930 年，他提出了一个模型，对宇宙常数值做了特别地调整，得出一个没有大爆炸，且在过去和未来尺度上都是无穷的宇宙模型。大爆炸的威胁让不少宇宙学的鼻祖们都感到恐慌。1948 年，赫尔曼 · 邦迪和托马斯 · 高尔德构想出一个物质“连续生成”的过程，希望构建一个能替代大爆炸理论的模型，而且不违背已观测到的宇宙膨胀。物质应

该持续生成，遍布四处，这样才能保持宇宙平均密度的恒定，冲抵爆炸造成的稀释作用，对宇宙保持稳态至关重要。为此，只需在每立方米的空间内，每 50 亿年产生一个氢原子！尝试重建时空不变的稳态宇宙神话，无疑极具吸引力，这就是“完美宇宙学原理”。然而，一系列证据却更支持勒梅特：大量轻物质的发现、宇宙微波背景辐射及其特性、恒星年龄、星系演变……所有结果都倾向于原始宇宙曾有过一个极热阶段的结论，站在了大爆炸理论模型一边。

奇点的威胁

大爆炸理论不承认 t_0 之前的时刻，在这一时刻宇宙标度因子 $R(t_0)$ 为零。但是，t_0 时刻本身引发了无穷问题，和在黑洞奇点中遇到的问题类似：宇宙本应该压缩在一个无限小、无限密、曲率无限大的体积内。在大爆炸的某些原始版本中，在膨胀之后，即数百亿年后的有限未来，等待宇宙的也是同样的命运。这就是“大挤压”。但在今天，人们发现了宇宙加速膨胀之后，几乎没人再认可这样的版本了。

与黑洞一样，原始奇点也标志着流动宇宙线的中断，即时间的中断——这次是过去的中断。奇点没有被当成一个“事件”，对于数学家来说，它不属于时空，但构成了“时间边界”，位于一段有限的历史中。尽管难以接受，人们还是痛苦地删除了空间的边界！时间是有限的——这对应着宇宙线的突然中断——而密度与曲率的无穷却令人难以想象，于是出现了悖论。

宇宙学家试图摆脱这种可怕的状况，这种欲望堪比他们希望删除黑洞的奇点。他们努力尝试，想找到一些没有原始奇点，具有无

穷能量和曲率的宇宙模型。宇宙常数还不够，有人认为，使用某些毫无根据的、简化的假说可能误导了计算，让一些本来不存在的奇点出现在方程的解中。但这一推测也不正确。自 1933 年，还是勒梅特勾勒了一个重要的证明前景：只要假说合理，广义相对论必然导致宇宙奇点的出现。就此，他预言了著名的“奇点定理”。直至 20 世纪 60 年代，该定理才以一种更普适的方式被重新证明，而证明者霍金和彭罗斯也因此蜚声国际：只要宇宙奇点满足广义相对论，并包含与观测一样多的物质，无论在哪个宇宙模型的历史中，宇宙奇点都是不可避免的……这与已被证实的黑洞未来理论堪称对称理论。

唯一能摆脱引力无穷的方法是走出经典广义相对论的框架。这是一条看似合理的路，一切都让物理学家相信，充满无穷量级的奇点标志着理论有效性的极限。此外，人们已经注意到广义相对论并不是一个完整的理论——任何一种已提出的引力理论都不是——它不能吸纳描述微观世界的量子物理学原理。所以无论如何，将广义相对论的结论外推到任意小的距离上都是不合情理、没有根据的，更不用说将之推至奇点了。我们也不能将广义相对论应用到普朗克长度（10^{-35}）以下的空间量级上，普朗克长度扮演着微观视界的角色。物理学家们不知道在这些量级上究竟发生了什么，他们认为几何可能受到量子涨落的影响，而相对论没有将此考虑在内。

根据大爆炸模型，想重建宇宙标度因子尺度上的变革，需要回到 10^{-35} 米尺度。这一宇宙历史时刻被称为“普朗克纪元”，对应着 t_p 时刻。根据之前提到的编年方式，t_p 比 t_0 时刻稍早一些（10^{-43} 秒）。这时，温度和密度值都极大，分别为 10^{32} 开尔文和 10^{94} 克每立方厘米。在如此极端的条件下，广义相对论不适用，因为它无法考虑量子效应。然而此时，量子效应占主导地位：想了解这个时期究竟发

生了什么，必定要涉及量子引力理论——它统一了量子物理学和广义相对论。

我们的物理学无法重现 t_0 时刻，也就是奇点处的宇宙，而只能到 t_p 时刻。对从前的一切设想都归于一种量子模糊状态，因此，重建宇宙史只能从普朗克纪元开始：这不是宇宙的真实开端，而是我们所能描述的开端，或者在某种程度上，是我们可以理解的开端[①]。这对后来的宇宙演变描述并未造成任何改变：我们可以从今天上溯到 t_p 时刻或直到虚构的 t_0 时刻——这只是 10^{-43} 秒的差别，而膨胀却持续了将近 140 亿年。

量子引力与离散时空

物理学家们就一点达成了共识：如果不引入量子引力理论，就无法正确地处理这些问题。引力与物质一样，应当从量子理论角度重新阐释。爱因斯坦早在 1916 年就提出过这一想法："或许，量子理论将不仅改变麦克斯韦的电动力学，还将改变新的引力学（广义相对论）。"

随着广义相对论的发展，引入量子引力理论显得愈发重要。广义相对论预言，在引力坍缩过程中和大爆炸宇宙模型中，奇点会不可避免地出现。将无穷小引入相对论之中后，奇点现象牵扯到微观量级上的时空结构，凸显出两种理论是多么不相容。我们曾说过，

① 一些较新的理论分支，如超弦理论（见"暗能量"）或圈量子引力（见"量子引力与离散时空"）假设了一些没有原始奇点的宇宙模型。普朗克时期表现的是"大爆炸前"的收缩时期和现在膨胀时期之间的"宇宙大反弹"。

如果某个物理学理论中存在奇点，这将被视为该理论的缺陷，需要更好的理论来完善。理解大爆炸时期和黑洞深处所发生的事件都不能绕过量子引力理论。确切地讲，量子引力理论的主要作用之一就是删除引力奇点。

面对难题，物理学家们直到 20 世纪 60 年代初才学会将经典理论转化为量子理论。他们为此发展了一些数学工具，包括折叠理论、纽结理论、群论、拓扑，等等。这些数学工具既抽象又复杂，全世界只有几十位专家能够真正明白。新的数学工具、量子物理学和广义相对论结合在一起，成功地推广开来。

半个多世纪以来，主要出现两种方法能将引力量化。第一种方法倾向于量子场论，认为引力首先是作用于物体之间的力场，希望在被动的外部时空中对粒子，即“引力子”的交换加以量化。第一种方法的基本理念是粒子是延展的而不是点状的物体，这样一来，空间要多于三维。当然，这必然牵扯到超弦理论。

第二种方法倾向于广义相对论的几何理论，希望时空自行量化。在“时空原子”层面上，量子效应彻底改变了时空的结构，将时空变成了颗粒状，变为“离散”、不连续的状态（见“无穷就这么消失了？”）。

在这两种情况中，无穷和其他奇点出现在物理学理论中的深层原因被剔除了，计算止步于某种量级的“断口”，比如，空间粒子大小不是零，或者粒子的维度不是零，于是，物理量有了有限的值。

今天的物理学在很大程度上都是几何化的：牛顿的物理学处在空间和时间范围内，爱因斯坦的相对论物理学也处在时空领域内。“连续的”单位直观地阐述了面积和空间的概念，数学家们称之为“微分流形”。所谓连续性就是一块流形不论有多小（最简单的例子

是一段线段），其包含的点都是无穷的。连续性的另一种解释是，我们可以任意假设一些无限小的长度、面积、体积、期限，让它们无限地接近零（这里就产生了芝诺悖论）。人们已经习惯了这样的描述，但它们在物理学上仍展现出令人困惑的一面。一个空间里永远只能有数量有限的物体（如粒子），一段时空中永远只能有数量有限的事件。空间点是事物体可能存在的位置，时空点是事件存在的位置。于是，人们觉得几何描述有点过多了。正如我们之前所说，零维点的出现引发了无穷的分歧和奇点，从物理角度看，这的确十分恼人。所以，假定几何框架（空间或时空）是发散的而不是连续的，这种想法更有吸引力。

爱因斯坦本人也曾想到，一种假设的量子引力理论可能会让时空结构变得离散。但无论是他本人还是其后继者，都没能构建出这种理论。想法是这样的，如果物质由离散体（粒子）组成，那么时空也应如此。今天，人们为量子引力理论搭建了一点框架，有些想法似乎已经导出了离散时空的几个版本。我们稍后会回到这个问题。一些物理学家研究如何“从头开始”在离散而不是连续的框架下研究物理学的可能性，结果碰上了数学上和概念上的困难。但是。数学的发展已经让我们看得比爱因斯坦更清楚。为了替代连续几何体——最典型的就是空间，人们已经提出了很多种可能。然而，难题之一是人们希望新实体仍能保留空间的某些特点，尤其是对称性。

■ 非交换几何

非交换几何就是其中一种可能。法国数学家阿兰·孔涅借助代数和对偶性概念，提出了一个真正没有点的几何。从笛卡儿开始，人们就知道如何通过代数来阐述普通的空间，比如用坐标系，即著

名的笛卡儿坐标系来描述空间。坐标系将数字和空间上的点对应起来，这些点就变成了函数。通过加法或乘法的运算，这些函数组成了一个精确的数学结构，我们称之为代数学。重点是，定义空间的函数集将空间的所有几何特点都进行了编码，但函数集却有着代数结构，能进行加法和乘法运算。因此，空间可以被代数描述。这种几何描述与代数描述之间的对应特性就是“对偶性”。

函数类的代数具有“交换性”。简单地说，当两个函数相乘时，其先后顺序并不重要：f × g 和 g × f 是完全一样的，和普通数字计算一样。非交换几何将对偶性扩展到一个更普适的代数类别里，这一类别不一定要有交换性。

交换代数与一个常规连续空间或空间的流形可以是对偶的，所以，这个代数被解释为函数代数。但“非交换代数”就不同了。非交换代数被解释为一种“新空间”的对偶对象，而非常规空间的对偶对象。所谓新空间就是“非交换空间”，其几何性非常独特，我们在其中找不到任何点。在新空间中，不可能有比最小基本体积更小的体积，在某一限定区域内，我们只能找到数量有限的基本单元。

恰巧，这种几何貌似能完全适用于量子物理学。在某种程度上，从经典物理学到量子物理学的过渡可以用数学表达为从某种“交换”常规空间——“相位空间”，过渡到“非交换”空间。非交换性的特点是存在一种不可分割的单元，其体积与普朗克常数有关。这就是“海森堡不确定性原理”的数学表达。今天，一些物理学家正在探索更激进的假说，比如时空几何可能是非连通的，也就是说，时空的四个坐标不连通。但一切仍在假想阶段。

■ 因果集合

时空通常被视为所有虚拟事件的集合，也可以说是可能发生事件的时空位置。然而，物理事件比虚拟事件少得多。因此，继拉斐尔·索金之后，一些物理学家认为这种描述太繁琐，而且与真实物理事件相比，时空中的点数量太多了。这种判定正是基于“因果律”，或说因果集（causal set）。因果集是一系列单独点的合集，点不形成连续体。实际上，我们认为点仅代表物理事件而不是虚拟事件的集合。点之间的关系受到因果律物理原理的约束，根据这个原理，结果不能在原因之前。因果集构成了离散、纯粹的时空。

因果集在整体上可以是无穷的，但人们认为它在“局部”上是有穷的。这就意味着，对于既定的两个事件，与它们有因果关系的事件数量是有限的。对于呈现物理事件，这种限制条件十分合理，因为它简化了要处理的数学计算。人们已经取得了一些颇为有趣的成果，但也不能就此认为我们已经成功获得了准确的量子引力理论。

■ 圈量子引力与量子空间

上述方法试图构建一种时空不连续的物理学。在“圈量子引力”理论中，时空也呈现出离散特点，但与之前性质不同。然而，这只是形式架构的“结果”，起初并不是有意为之。圈量子引力没有深入细节，它将标准量化方法应用到广义相对论中，就像迪拉克在麦克斯韦经典电磁理论的基础上构建了量子电动力学一样。广义相对论带有几何性质，重建了一个“量子空间”，即一个由面积量子和体积量子构成的空间。这些量子的值与我们多次提到的普朗克长度有关：普朗克长度为 10^{-35} 米，在该值以下的量级中，空间几何形状不再被视为连续。最小可能面积是以普朗克长度为边长的正方形面积，即

10^{-70} 平方米，而最小体积是以普朗克长度为边长的立方体体积，即 10^{-105} 立方米。空间量子真的非常小：在 1 立方米空间中可以有 10^{105} 个“体积原子”，远远超过整个可观测宇宙中的立方米数（10^{81}）！

空间的量子结构可由“图形”表示，也就是一组通过边连接的节点（顶点）。这种图形称为“自旋网络”，这个概念最初是由罗杰·彭罗斯提出的。这里只引入了对象（由顶点表示）之间的关系（由边表示）。我们注意到，这种表示方法与莱布尼茨的观念完全一致。莱布尼茨反对牛顿僵化、绝对的空间，在他看来，空间只是物体之间一种理想的关系体系，而物体不能独立存在。

如果可以画出空间量子态的图——被恒星、黑洞、星系和可观测宇宙其他组成成分的引力所弯曲的几何——我们将获得一个极其复杂的自旋网络，包括大约 10^{186} 个节点。这个数字虽然非常巨大，却是有限的……

作为节点的空间原子与广义相对论的连续空间之间是如何形成联系的呢？空间的量子态是交错的圈的叠加。在这个尺度上，时空是不连续的。但所有圈都编织成一种锁子甲，在更大的尺度上会形成连续的网状。在这种空间里，我们如何表达物质和能量？我们用某类节点来表示电子等基本粒子。除体积之外，我们还赋予这些节点其他用来描述其属性的标签。

最后，我们不仅利用空间还要加入时间来量化时空，于是，我们必须调整自旋网络：自旋网络的线和节点分别发展成面和线条，形成四维“自旋泡沫”——这个颇具画面感的术语是卡洛·罗韦利提出的。自旋网络是自旋泡沫的横截面，是一张世界的快照，就像“空间”是时空的一个横截面一样。因此，时间本身是离散的：正如自旋网格的离散几何定义了空间，主导网络排列的跳跃序列定义了

时间。时间不再像连续的水流般流逝，而是像时钟的嘀嗒声般跳跃，每一次嘀嗒声都近似于一段普朗克时间（普朗克长度除以光速），即 10^{-43} 秒。

圈量子引力简单而纯粹地消除了引力奇点，无论是经典广义相对论预测的黑洞深处的奇点，还是大爆炸模型预测的奇点。这是圈量子引力带来的根本变革。自此，空间的曲率不再如大爆炸模型所说的趋向无穷，而是一个极大的值——1 倍太阳质量黑洞表面曲率的 10^{55} 倍，要知道，前者已经十分巨大了！但这个值毕竟是有限的。在这个图景中，大爆炸不再是巨大的一声“砰”，而是一次“大反弹”，在此之前，宇宙已经存在并经历了快速的收缩！

圈量子引力尽管取得了一定成果，但尚未成为一个真正的理论，而且还引发了许多数学难题。其中一个问题仍与无穷有关。在“普通”量子物理学中，所有可能的状态集合应该具有一定的数学结构，它们构成了“希尔伯特空间”。希尔伯特空间是一个无穷的基数集合，但其维度可以是有穷的，也可以是无穷的。在圈量子引力的情况下，希尔伯特空间的维度是无穷的。这并不是一个不可逾越的难题，但令人迷惑的是，空间维度是一个“非常大”的无穷，大到不可数（见“康托尔的基数无穷”）。物理学家的前进路线之一是寻找另一个版本的理论，在其框架下，希尔伯特空间的无穷会“更小”一点。

■ 趋向于无限维

普通空间包含无数个点，点之间有一定关系，显示了空间的结构。例如，邻域关系构成了拓扑结构（见“宇宙拓扑学”）。具有拓扑结构的空间称为“拓扑空间”。一个集合必须至少拥有一个拓扑结

构，我们才能其中构建几何，换句话说，集合才能被视为一个“空间”。然后，微分几何、黎曼几何在这些空间上设想了更丰富、更复杂的结构，我们称之为流形。

流形最直接的特征就是维度。直观上，我们能将一维的线、二维的面和三维的空间等区分开来。几何学家们考虑 n 维（n 是任意整数）的流形后，无需太困难就能将上述区分维度的方法推广。任意却总是有限的流形维度扩大了空间的概念。数学家们描绘了维度的性质，一个多世纪以来用这些性质进行计算。物理学家们借鉴了这其中的很多例子，我们在前文已经遇到了不少。

数学家们对流形性质随维度而变化的方式非常感兴趣。他们的结论是，人们最熟知的三维和四维——因为它们直接对应于我们的空间和时空概念——具有特殊属性，因此有别于其他维度。但是数学家们也想知道，当维度数量变得无穷大时会发生什么？这个问题可不简单，无限维度的空间属性相当混乱，普通计算都不适用。无限维度的流形（严格来说，不该再称为流形）会具有什么样的属性呢？人们的好奇心并不是凭空而来的，在物理学和数学上都能自然而然遇见这类对象。我们已经遇到了几个例子。为了明确问题，让我们选取一个最简单的流形——一个平面。想象一下，在平面上从一个点转换到另一个点，如平移、旋转等。尽管某些属性是必须的，比如连续性，但它们的数量无限。而且，由于这些属性具有几何性，数学家对其构成的集合的几何结构很感兴趣。集合的几何结构表现出无穷的维度，它仍具有几何结构，不再是流形而类似于流形。该如何描述其表征？如何用它来“构建几何”？

法国数学家和物理学家让 – 马利 · 苏里奥提出一个可能的答案：以他所谓的“差异学”形式来扩展流形的概念。后来，这种扩展理

念也运用在了“范畴论”，如今，它构成了一个数学新分支，具体应用于物理学。比如，它提出考虑某些类型的奇点不无好处，但正如人们预料的那样，这让几何学和物理学的某些问题变得相当复杂。

量子几何动力学

宇宙学家希望能更多地了解普朗克纪元。这道藩篱阻碍了物理学前进的脚步，限制了人类认知的疆域，而且，问题没有一次不是源于无穷！何况这并不是问题，因为四维连续时空流形的框架已经完完全全展露出来了。

量子宇宙观源于量子引力学。正如前文提到的，在微观层面上，宇宙的几何状态可能是模糊的，类似不断涨落的小泡沫（图 4.3）。我们可以将它比作海洋表面：从飞机上看，海面看起来很平静；降到较低的高度后，我们看到其表面仍是连续的，但我们已经开始察觉到海面的一些波动；如果潜入海洋中，潜水者将看到海面的动荡和不连续。海面波涛汹涌，水滴被抛出后又落下。同样，时空在人类视野的尺度上，甚至在原子核尺度上看似都是连续的，但在普朗克量级上，“泡沫”可能会变得明显。基本粒子会是时空的“水滴”吗?

到目前为止，人们还没有建立起一套完全严密、可计算的量子引力或量子宇宙学理论。一些初步描述真的很迷人，如我们提到过的节点理论和圈量子引力。但是，为何不尝试跳过量子引力这一步，直接解答量子宇宙学问题呢?约翰·惠勒和布莱斯·德维特在 20 世纪 60 年代末提出了量子几何动力学。起初两人注意到，广义相对论可以被解释为经典“几何动力学”，即宇宙空间几何动力学。量子几

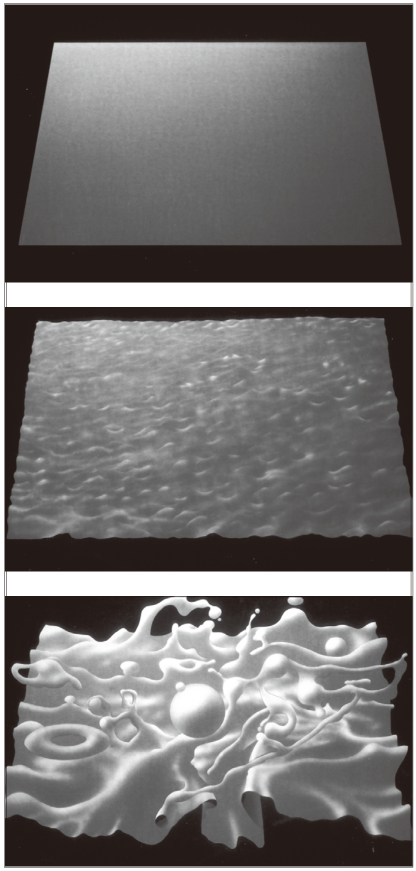


图 4.3　三种版本的空间

空间或许不像我们想象的那样“平滑”。根据量子引力学的某些观点，空间看似平滑，那是因为我们是“大致看上去”，就像从高空的飞机上看海面一样（上图）。另一个分解得更详细的版本（中图）展示了更曲折的外观。而在最微观量级上（下图），即接近普朗克长度时，其结构可能完全是混乱的（见彩图）。

图片来源：© J.-M. Joly/Ciel & Espace

何动力学就致力于几何动力学的量子转换，希望采用普通量子物理学处理物质的方式来处理时空几何。

首先，三维空间在某个既定时刻的各种曲率、大小、有限或无限等所有可能组态被称为“超空间”。其中每一个组态都被称为宇宙的“瞬时状态”。严格地说，对状态的描述必须包括该空间内的物质组态。每个组态都由超空间的一个元素——一个“点”来表示。这种理论赋予无穷一种新的呈现方式，因为不仅超空间是无限的——这在物理学上相当普通——其维数也将是无限的。

通常意义上的宇宙模型，即非量子宇宙模型，是空间及其内容的一系列暂时状态，人们有时称之为“历史”。模型在超空间中表现为一连串的点，即一条“曲线”。这扩展了空间中粒子轨迹的概念：宇宙模型在超空间中变成一种轨迹。

然而，普通量子力学的特点之一就是消除粒子轨迹的概念。更形象地说，普通量子力学让轨迹“虚化”了。况且，量子物理学的现代解释宣布，宇宙系统的相位空间在数学上变得模糊，也就是说，变成了“非交换的”。正如前文所说，从经典物理学到量子物理学的过渡可以被解释为从某种几何学（相位空间的几何学）到非交换几何的转换。

对于量子几何动力学来说，情况也是如此吗？我们能将其视为超空间的量子动力学吗？简单来说，问题在于要将超空间“虚化”，至少让其包含的点和轨迹虚化。“宇宙的量子态”将不再由一个点（经典状态）而是由超空间中的“斑”来表示。这个斑是“宇宙波函数”的基础，而这恰恰是量子宇宙学的根本目标。换句话说，我们再不能将宇宙与精确的几何相关联，宇宙将对应于超空间的一个点。我们只能讨论一组可能的几何（斑），每个几何都有一个概率。

剩下要做的就是计算这个概率，检查其行为，特别是其意义。量子宇宙学的早期版本猜想，这一概率由“惠勒－德维特方程”控制。这个方程十分复杂，它的一般形式根本不能用。或许，唯一能找到解的方法就是大大简化问题。例如，我们假定空间曲率恒定，仅设想一个受简单几何限制的族。我们仅考虑属于该租的有限部分，而不是考虑超空间中的所有点。我们称这一有限部分为“迷你超空间”。

为了在迷你超空间中解方程组，我们还需要对宇宙边界限定一些条件。这些条件限制了宇宙波函数的行为，就像经典力学中的粒子轨迹受其初始位置和速度的限定一样。由此，宇宙学中又出现了一些尚无法解决的根本性问题。安德烈·林德和亚历山大·维兰金为代表的“俄罗斯学派”，以及詹姆斯·哈妥和霍金为代表的“盎格鲁－撒克逊学派”提出了各类假设。比如，哈妥和霍金的量子模型只设想了一些没有边界或界限的时空几何，就像球体表面，但具有两个额外的维度。根据这些极其简化的模型，宇宙将不仅在空间（总体积是有穷的）是有穷的，在“时间上”也是有穷的。如此一来，导致问题的初始奇点就消失了。更准确地说，它变成了一个简单的坐标奇点——就像一个球体的北极，正如黑洞视界一样。自此，没有任何违反物理学原则的问题出现。宇宙将不再有任何边界，无论在空间上还是时间上，都是无始无终。然而这种新的“永恒时间”只是一种虚构时间，是一个数学术语，以抛弃了由时钟或星系膨胀测得的真正的宇宙时间为代价。一个方方面面都能令人满意的解答仍有待提出，而这一天还很遥远。

相反，林德假设了混乱的初始条件。从质量上看，近似方程解将以巨大、永恒、能自我复制的宇宙形式呈现，有时，我们将其比

作“迷你宇宙泡沫”。泡沫的每个“气泡”都具有自己的特征，如物理常数、空间维数等。这甚至让有些人误以为气泡是“另一个宇宙”。我们能观察到的部分宇宙与整体宇宙不一样，而整个“可观测宇宙”仅由这些气泡中的一小部分组成，而气泡可能经历了一个极其剧烈且不成比例的膨胀，这一过程称为“暴胀”（见“宇宙视界”）。每一个独立的气泡，特别是构成“我们的宇宙”的气泡，都可能诞生和死亡。但是，整体宇宙既没有开始也没有结束。显然，这一想法也许永远无法被验证或被观测到。现在，我们已经抵达了科学研究的前沿——或许已经跨越了边界。

可见，在解释宇宙起源时，量子宇宙理论引发的问题一点不比它带来的解答少，问题甚至比答案还多。量子宇宙理论解决奇点问题了吗？很难说。有些模型做到了，有些并没有。为了在迷你超空间内解方程，必须大幅简化解答过程，这或许就是结局飘忽不定的原因。某些指数暗示，在全新的大统一理论框架下，奇点或许会消失。而物理学家们还在为此努力——至少，这是他们的研究目标之一。

从宇宙到多重宇宙

基础物理学和量子引力学的某些理论提出了“多重宇宙”的迷人概念，有时也称为“多元宇宙”。这是一个假想的集合，包含了极其多甚至是无穷多的“可能”宇宙，我们的宇宙只是其中一个非常特殊的情况。多重宇宙是所有“成形宇宙”的集合，其中每个宇宙都有一个时空、一些物质、能量、物理定律及其自然界基本常数。

1895 年，美国哲学家、心理学家威廉·詹姆斯在一个迥然不同

的框架下第一次使用了“多重世界”（multiuniverse）这个术语：“可见属性不过是顺从和冷漠，也许可以说多重道德世界，而不是单一道德世界。”一个世纪以后，这个新词汇进入理论物理学家的词典中，只是意义完全不同：他们认为物理学中存在多个宇宙，并赋予这个词一个现实概念。

亚里士多德认为多重世界是荒谬的。但在中世纪，东方的安萨里（1058—1111）和西方的邓斯·司各脱等一些哲学家和神学家想弄清上帝是否创造了“最好的世界”。他们在无形中承认了上帝还可能创造了其他世界。1277 年，巴黎主教埃蒂安·坦皮尔（约 1210—1279）颁布了“大谴责”宣言，包含 219 条谴责禁令，针对源于亚里士多德派或阿维罗伊派的哲学和神学命题。他特别谴责了世界的独特性，认为这违背了神的全能性。

17 世纪，堪称科学革命领军人物的莱布尼兹发现，世上可能存在无数的宇宙，每一个都有不同的物理定律，但条件是，相应的自然规律不会导致逻辑矛盾（见“牛顿的宇宙学”）。和其他哲学家一样，这位多领域的天才认为，即使是全能的神也不能造出“实际存在”的不协调的宇宙。那么，上帝为现在世界选择的标准就应该是可能的物理定律系统。而且，无比仁慈的上帝一定会确保选择最好的世界。这些理念不是在讨论物理学或广义上的科学，而更多彰显了神学思想。

如果说，莱布尼兹的形而上学涉及了潜在的不同宇宙，但这位哲学家并不认为这些宇宙是实际存在的。今天，越来越多的理论物理学家认为，这些与我们的宇宙不同的宇宙可能确实存在。科普类报刊也经常在头版上刊登关于多重宇宙以及与之相关的“参数微调”的文章，希望借此吸引广大读者。

■ 不可能存在，也很宝贵

在一个物理定律非常随意的宇宙中，生命出现的条件或许得不到满足。例如，如果质子的密度比几乎不到其百分之一体积的粒子的密度更大，那么构成生物的原子就不会存在。能这么说，意味着我们已经测到了质子的质量：其实，如果能测量某种量，那就说明如果量具有不同的值，世界也将是不同的。然而，也有人喜欢将自己思考的对象视为巧合。

英国皇家天文学家、剑桥三一学院教授马丁·里斯（1942— ）在《仅六个数》（*Just Six Numbers*）一书中描述了六个明显的“宇宙巧合”：如果其中任意某个巧合略有“失调”的话，那么恒星就不会存在，进而宇宙中也不再有生命。

简单来说，宇宙参数微调将是一个“智能构想”，也就是一个“人为原理”的结果。很明显，如果像莱布尼兹一样坚信存在“造物主”，那就不难想象，宇宙被精确调整为适应生命存活的状态。但反推这一“逻辑”，从宇宙参数调整开始推断“上帝存在”，这就比较令人怀疑了。的确，在思想史上，每一个“目的论”论据都会随着科学知识的进步而被推翻。目的论的历史可以追溯到古代，但最著名的例子还是 1803 年，一位英国牧师威廉·佩利认为正如腕表一样，植物和动物因其具有复杂的结构，也应该是发明和构想的成果。发明的背后有一位发明者，构想的背后有一个智慧的存在。遗憾的是，这位牧师的“腕表”推论在 50 年后被查尔斯·达尔文彻底推翻了。

既然“智能构想”这种说法从任何角度都不能解释我们的宇宙为何适合生命诞生，那么我们该如何解释这一事实呢？有人认为，这种适应性是一个“微调难题”。一些物理学家认为通过“人为选择

效应”，多重宇宙可以解决这个难题。想理解人为选择效应，最简单的方法是从地球上的生命入手。地球上之所以能存在生命，是因为一系列精确条件得到了满足：地球与太阳的距离“刚刚好”，使得地球上存在液态水；地球大气层不像火星或金星的大气层一样消失，而金星同样处在“刚好的距离”上；碳元素可以生成复杂的分子，等等。这些条件中绝大部分在其他大部分星球上都得不到满足。

那么，我们美丽的蓝色星球是如何被如此精细地微调，从而来庇护生命的呢？难道这只是一种可能性极小的巧合？而“可能性极小”又是什么意思？整个宇宙中有如此多的星球（千千万万亿），尽管它们中绝大多数完全不适于生命居住，然而，如果它们中的一个或者几个星球呈现出和地球一样能产生生命的物理与化学条件，这是很正常的。既然在适于居住的星球上才能发生进化，才能诞生生命，才能出现可以提出这样问题的有意识的生物，那么我们不应该只能存在于这个星球上或其中某一个星球上。这没什么奇怪的！表面上的巧合其实很平淡无奇……

这种“人为论据”看上去有力地解释了地球上的生存条件。但它能适用于更广的量级吗？从宇宙学角度来看，如果我们的宇宙在多重宇宙中被“选择”，那么其参数是被微调过的，这就不奇怪了。但反过来论证就不奏效了：并不是“因为”我们的宇宙受过微调，它就“必然”是一个巨大宇宙集中的一份子。我们也不能仅凭地球的特征来推断其他星球是否存在，更不能将这一论据推至其他宇宙。

实际上，这类人为论据对证实多重宇宙毫无助益。有人宣称，我们的宇宙是一种极小可能性，一种偶然……他们还提出了宇宙能够呈现出当下状态的各种概率。但是，这些讨论中大量使用的“概率”概念通常没有明确定义，至多体现了使用这些字眼人的个人喜

好，可以被解释为大家对各类多重宇宙的不同偏好。

那么，人们至今尚未知晓的物理学原理，是否会让宇宙拥有偶然属性的“概率”加大？当爱因斯坦提出“创造宇宙时，上帝有选择吗？”这个问题时，他其实是在怀疑物理学的基本常数，如质子质量或引力常数，是否能自然地导出某些未知却支配着大部分可能宇宙的物理定律，而不是走向一种纯粹的巧合结果。如果我们发现了这样的高级法则，我们就能彻底意识到，像我们这样的宇宙并不是例外，正相反，这是一种必然……因此，尽管人为推论受到广泛推崇，甚至被媒体追捧，但很多研究人员还是步爱因斯坦后尘，投身探求真正的根本性理论——“万物理论”。罗杰·彭罗斯是其中最杰出的物理学家之一，他指出，当理论家们意识到自己的理论无法解释所有观察到的事实时，往往就会引用人为推论。

不幸的是，从“万物理论”角度解释我们的宇宙特征，目前仍是人力所不能及的，而且在未来的一千年里也可能仍然无解。此外，即使我们能找到一个限定物理学基本常数值的理论，也不能满足人类想用原始理论来阐释宇宙的本能欲望。

今天，基础物理学理论总是趋向于依赖复杂的数学结构。物理学家试图将数学结果与观察结果相对应，好让数学理论更贴切地描述物理世界的属性。可是，其他那些一样可以遵循，却被宇宙无情遗忘的无数数学结构呢？为什么不在这些数学结构中探索宇宙？莱布尼兹认为，上帝也不能自由地创造任意一种宇宙，但他运用上帝的全能性来解释为什么只存在一个可能的世界——他认为这是最好的世界。假如不借助超自然概念来回答“为什么是这个世界而不是另一个世界？”的问题，那么，将自然界不采用的模型统统排除的理论就派上用场了。但这种方法也有局限性：例如，从逻辑上，我们

不能排除有些宇宙完全没有物质和相互作用。这就是为什么“万物理论”会彻底失败，这也是为什么物理学家认为多重宇宙能使我们更好地理解“微调问题”。

■ 多重宇宙的物理学证据

为了证明多重宇宙的存在，能否找到比人为论据更具有说服力的物理论据呢？最近，理论物理学就提出了这样的论据。如今，各个基础物理学分支使用的某些数学模型自然而然地引出了多重宇宙的概念。永恒的膨胀、弦理论、圈量子引力，甚至是 60 年前休・埃弗雷特提出的旧量子力学“多世界诠释”，这些理论都假设存在多个宇宙。有些理论看起来很美妙，尽管为了更简洁，它们必须以假设存在大量不同宇宙为代价。各种理论提到的“多重宇宙”概念也是各式各样：混沌膨胀的多重宇宙由间隔遥远的不同“宇宙”组成；弦理论的多重宇宙似乎纯粹是虚拟的；圈量子引力中的“宇宙”一个接着一个，在反弹时期被隔开；量子力学的“多世界”（源于埃弗雷特的观点）是共存的，彼此没有时间和空间上的关联。然而，大多数关注微调问题的人并不关心这些琐碎的难题。

当今基础物理学中假设的多重宇宙到底有多少可信度？相当多的理论已经正确预测了以往从未观察到的现象。正电子在各方各面都与电子类似，除了具有符号相反的电荷——广义上讲，它们互为反物质。数学家保罗・迪拉克在正电子被发现之前就预测了它的存在。今天，正电子经常用于医疗扫描。中微子、中子星、黑洞、引力波、希格斯玻色子都是如此。对于人们预言的各种多重宇宙来说，结局是不是也如此？但与上述例子不同的是，多重宇宙概念不符合人类最根深蒂固的想法：什么是世界？什么是现实？这与我们之间

的关系是什么？问题在于，多重宇宙的概念经常被滥用，却始终没有明确定义，相关陈述经常是荒谬而矛盾。一个理念的发展基于严谨的数学，并不代表它在物理学领域的应用一定是逻辑严密的。

为了证实这个概念，还需要进行认识论上的严肃探讨。我们注意到，埃弗雷特的原始版本量子物理学中的“多重宇宙”概念最完善、最有根据，实际上，它并不意味着多重世界或多元宇宙，而远比这更微妙。

最后还剩下一个重要问题：我们能否在自己的宇宙中收集一个可供实验的证据，或至少是一个能够反驳或确认多重宇宙概念的迹象？大多数哲学家和科学史学家认为，卡尔·波普尔提出的“可证伪性”是所有合理科学理论的必备性质。虽然波普尔以后的科学哲学已经发生了变化，但对“不可证伪”的论点保持怀疑，仍不失为一种好策略。事实上，阴谋论的支持者心里都清楚，就算有反证，承认最荒诞的想法也比“改变想法”从心理上更容易接受。所以，某种模型或理论“不可证伪”始终是一个危险信号。

是否有可能证伪多重宇宙理论，这在物理学家之间引发了激烈的争论，甚至不乏恶毒的相互攻击。尤其，加拿大圆周理论物理研究所的李·斯莫林和斯坦福大学物理学教授莱昂纳多·苏士侃之间爆发了激烈的论战。斯莫林是圈量子引力学的创始人之一，他支持不可证伪性，而苏士侃作为弦理论的创始人之一，支持可证伪性。两人曾经联名发表过一篇呼吁休战的文章，论战也暂时平息了。但两年之后，和平被粗暴地打破了。苏士侃性格暴躁又自命不凡，他毫不留情地在《泰晤士报》上发表了一篇文章，对斯莫林进行人身攻击，宣称斯莫林归根结底不过是一个平庸的物理学家，只是凭着那些科普活动和媒体宣传才获得了知名度，单凭他在物理学上的成

就根本配不上当下的声望。弦理论可证伪性的争论性质已经超出了普通科学辩论的范畴，更谈不上是有益的科研交锋了。

除了有待证明的特例外，多重宇宙理论在本质上貌似是不可证伪的[①]。结果，所有能直接证明其他宇宙存在（或不存在）的证据都是不可得的[②]。然而，某些理论倒是有希望获得间接证据。斯坦福大学的俄裔教授安德烈·林德就是首批提出相对精确的多重宇宙模型的物理学家之一。林德的多重宇宙诞生于一个描述大爆炸之后很短的膨胀阶段内的宇宙暴胀模型（见“宇宙视界”中关于宇宙视界的内容）。林德认为，宇宙暴胀可能会造成彼此没有因果联系的超大空间，每个区域都具有不同的物理属性。随着时间推移，这个“混乱暴胀”的过程将孕育出类似弦理论的“多重宇宙”。最近，研究人员认为已经在远古的宇宙微波背景辐射中探测到了这一大爆炸冷却的回声——林德式宇宙的泡沫与我们宇宙的泡沫之间的碰撞痕迹（见“夜之黑，‘无穷空间’的第一佯谬”）。然而这些观测依赖了大量假说，对结果的阐释也颇为牵强，没有什么可信度——至少，只要我们不能排除任何其他可能的阐释，就无法完全确认结果！此外，严格来讲，林德的宇宙模式并不是多重的，所以命名并不合适。林德所说的“其他宇宙”其实是我们宇宙的遥远地带：它们太遥远了，导致不能直接观察。

尽管困难重重，仍不乏大量物理学家就多重宇宙展开长篇大论，就好像这是一个既定的事实。英国宇宙学家伯纳德·卡尔甚至说：“如果你不信上帝，那最好相信多重宇宙。”在神学与宇宙学混杂的

① 即使有些人，如法国天文学家奥列林·巴罗，是多重宇宙虔诚的支持者。
② 黑洞曾长期处于这种状态，其存在只建立在间接证据的基础上，直至近期，才探测到了由双黑洞引发的引力波。

漫长的思想史中，这种天真的言论并不新鲜，它拒绝了一种可能性，就是大多数物理学家探究的其他未知物理学定律可能证明，即便没有神的干预，宇宙也并不会与其现状不同。

在关于“微调”或“宇宙巧合”问题的相关探索中，人们倒是不难相信，多重宇宙导致的问题比其能解决的问题要多得多。特别是，“可能的多重宇宙”数量或许是没有上限的！但其数量不超过可能的宇宙数量。多重宇宙的尺度也会出现这一问题。比如，我们如何了解也许占大多数的“可能的多重宇宙”，而这其中却无法存在类似我们的宇宙？为什么“我们的”多重宇宙中存在能容纳生命的宇宙？为什么偏偏是“这种”特殊的多重宇宙，而不是另一种？我们面临着需要无限回溯的永恒问题。一如既往，不合理的想法永远不能解决根本性问题。

■ 无穷的多重宇宙

抛开哗众取宠的性质不谈，如果说多重宇宙貌似与物理学不相容，那为什么不用在哲学层面上呢？

哲学家大卫·勒维斯在 1986 年出版的《论世界的复多性》（*On the Plurality of Worlds*）一书中发展了“模态现实主义”的假说，从某种程度上再现了莱布尼兹的“所有可能世界的集合”。假说认为，所有可能世界都确实存在，并以不连通的宇宙形式存在。这种“不连通性”没有任何物理学意义，因为它禁止任何能够证明或推翻该假设的信息传递。但勒维斯倡导模态现实主义的原因与此前物理学家们发展多重宇宙的动机不同。勒维斯谈到“所有可能世界”时，他是真的想说“所有的”——无论哪个世界，即使是一个完全不懂物理学的人想象出的都算。一般来说，物理学家提出的多重宇宙数

量虽然大得不可思议，但仍是有限的。例如，弦理论的某些引申理论提出的数量是 10^{500}，与之相比，我们宇宙中的原子数（10^{80}）就微不足道了。随着理论的发展，提议也越来越多，多重宇宙的数量甚至到了 $10^{100\,000}$，或许这将是一个无穷数字。暴胀模型的鼻祖之一阿兰·古斯相信：暴胀一旦开始，就不会只创造一个单一宇宙，而是无数宇宙（见“宇宙视界”）。这让人想起勒维斯的模态现实主义。

我们能否借助无穷的多重宇宙来解决微调问题？ 1998 年，麻省理工学院物理学教授马克斯·泰格马克在一篇论文中提出，所有数学中存在的结构也都存在于物理学中。然而，数学结构的数量是无穷的。在由此产生的无穷多重宇宙中，出现一个人类宜居的宇宙就不是什么令人惊叹的巧合了，而单纯是一种统计上的必然。在无穷多的宇宙中，我们的宇宙只是与其他任何一个宇宙完全相同的存在，好比中奖的乐透号码组合，其实和其他数字组合没什么本质区别①。当然，我们已经远离了物理学范畴，但这也反映出物理学中某些貌似“切合”的问题，如所谓的“巧合”，可能与这一学科并不相关。

乍看之下，无穷多重宇宙似乎违背了神圣的简单性原则。这一原则也称为“奥卡姆的剃刀”，14 世纪哲学家、圣方济会修士奥卡姆的威廉曾言道：“如无必要，勿增实体。”简单性原则在科学史上经常发挥指导性作用，人们用它来甄选模型和理论。但我们很容易被直觉误导，在寻找真正的简单性时误入歧途。在某种意义上，弦理论的方程组比其任何特殊解更“简单”，因为它呈现出更多的对称性，涉及较少的自由参数。同样的逻辑也适用于实数的无穷性（见“康托尔的基数无穷”）。某些实数，如 π，很容易由简单的算法生成。但

① 我们很容易计算出，如果地球上的所有人都玩乐透，那么在每此开奖时都会有超过 1000 名中奖者。

在大多数情况下，想要限定一个实数就必须列举其所有小数，这意味着无穷的信息量。此外，我们可以借助少量公理来限定所有实数的集合 R。同样，无穷的多重宇宙比任何特定的多重宇宙更容易限定，或许，这是我们唯一能给出合理定义的多重宇宙。

这时，我们再次看到了诺贝尔物理学奖得主尤金·维格纳说过的“不合理的数学有效性”：“在物理学定律的形成过程中，数学语言发挥着神奇的效力。这是一个奇迹，我们既无法理解，也不配享受。”维格纳将问题完全视为奥秘，这真的合理吗？如果我们认真思考无穷多重宇宙，以及勒维斯和泰格马克提出的数学结构与真实宇宙之间的一一对应关系，那么数学描述世界的骇人力量会不会显得普通多了？

■ 一句讨人喜欢的蠢话

法律有一条基本准则：“一切不被禁止的都是允许的。”那么，一切“可能”的事情一定存在吗？在某种意义上，对于无穷多重宇宙这一概念来说，答案是肯定的。这可以被视为对“存在”一词的特殊新定义——但“可能”一词也可能需要定义。不过，无穷多重宇宙的概念无疑就在“科学”范畴之外。马丁·里斯曾将多重宇宙比作一家大型服装店：如果选择足够多，谁都能找到适合自己的衣服，而不必为此感到惊讶——我们只是找到了属于自己的宇宙。

最后，让我们再讲一个丰特奈尔侯爵的趣事（见“无穷变为现实”）。他在发表《关于宇宙多样化的对话》时，一边犹豫地问：“这是真的吧？”一边又说自己更愿意相信这是真的，因为相信它是件让人开心的事。于是丰特奈尔侯爵夫人答道：“你的蠢话挺讨人喜欢的，把它送给我吧！”

文学中的无穷

科幻作家保罗·布拉福特认为，科学在描述甚至解释这个世界时，永远只能描述某一个片段，其余部分都是文学的描述。事实上，在整个西方思想史上，无穷的三大谜团——数的无穷、空间的无穷和时间的无穷——启发了很多艺术家、作家和诗人。卢克莱修、帕斯卡、歌德、诺瓦利斯、雨果、布朗奇、阿拉贡、卡尔维诺、辛尼斯加利、科斯特勒和纳博科夫等人前仆后继，构想着世界的无穷与永恒、芝诺悖论、零时间以及无数与无穷有关的暗喻，如巴别塔和迷宫。保罗·瓦勒里在《海滨墓园》(1920)中写道：

“芝诺！残忍的芝诺！埃利亚学派的芝诺！

你用一只羽箭刺穿了我心，

它振动着，飞着，却又不动！

弦响使我生，箭到使我卒！

太阳啊！……灵魂承受了多重的龟影，

阿喀琉斯大步飞奔，却动弹不得！”

瓦勒里比任何人都希望打破文化的界限，但他在《笔记》中却指出：“无穷是对语言和文字的滥用，是毫无信用的泛滥。”他十分反感甚至坚决反对康托尔在 19 世纪末发展的对无穷的具化(见“无穷变为现实”)。康托尔的观点也激怒了不少物理学家、数学家、哲学家、语言学家、作家和艺术家。亨利·庞加莱并没有大惊小怪，他在《无穷的逻辑》(1909)中说：“对于不能用有限词汇来定义的对象，我们能否对其进行推理？我们在谈论它们的时候，知道自己在谈论什么吗？当我们对其发表言论的时候，

能否不说空话？或者，我们应该将其视为不可想象？就我而言，我可以毫不犹豫地说，它们是纯粹的虚空。”

或许，阿根廷作家博尔赫斯更好地阐述了有穷与无穷这一萦绕我们许久的难题。空间的无穷引发了种种难题，他却用非常巧妙的方式来呈现它：许多分叉的通道只能通向与之前相同的大厅，从大厅里又延伸出一些相似的走廊，无穷尽的重复让读者陷入迷宫中。博尔赫斯借此比喻宇宙（《巴别图书馆》）。而关于时间的无穷，博尔赫斯认为，人生经历太短，所以人类错把无限重复的事物当作独一无二的，比如觉得《奥德赛》这首史诗是“无法复制”的杰作。然而，博尔赫斯在《永生》中回顾波莱尔的论点和“猴子打字员”假说时（见“超大数”）又承认：“一旦有了无穷的期限，形势纷繁多样，变化层次不穷，人类一定会至少再创作出一次《奥德赛》。”

后记

对无穷的反思

“真实的人性如此有限，却与生俱来包含着众多无穷。”

——康托尔（1883）

无穷不是数学家或物理学家的私有财产，它是人类意识最本能、最深层的诉求。哲学、神学、艺术同样面临着无穷。

但无穷吓坏了物理学家们。恐惧可能来自一些被完美论证过的理论，如黑体或经典模型中的原子不稳定性。当然还有数学上的原因，无穷阻碍了一切有效运算。或多或少也有一些形而上学的原因，比如否定空间和时间的无穷。

面对在描述自然时产生的各种无穷，我们是否应该将之消除？又该怎么消除？答案多种多样，有时甚至互相矛盾。

粒子物理学和量子物理学必须消除物质的无穷才具有可操作性。然而，人们现在采用的消除无穷性的方法——重正化，可能比无穷本身更难以令人满意：消除一个量的无限值并不一定能解决所有来自无穷的问题，这就好比仅通过拒绝思考来假装解决了问题一样。

引力奇点、黑洞与大爆炸中的无穷给物理学带来了极限。人们试图消除或通过视界绕过这些概念，最后开辟了新的研究路径，如量子引力、量子宇宙学、超弦理论等。

至于历史上让思想家们都挂虑的空间和时间无穷，它们不但没有被否认，反而借助广义相对论和拓扑学的发展获得了特殊的地位。

通常，消除一种无穷会带来一种新理论，同时又冒出了奇点（相对论）和分歧（量子物理学）。物理学家们唯一能达成一致的就是全力消除新难题。但这又会导致什么样的新无穷呢？也许，我们应该建议物理学家们平复一下竭力摆脱无穷的欲望，当然，也不要上无穷的当。

伪装起来的无穷

有时，其他形而上学的假设并不赞成排除无穷。

以空间曲率为例，人们有一种根深蒂固的成见，十分推崇“平坦宇宙”概念。空间曲率为零即为“平坦”。有人认为，这样一个宇宙将更自然、更简单、更符合审美……但是，零曲率空间是由曲率无穷的半径来定义的，结果，支持零曲率空间变成了支持无穷曲率的半径！

上述推理也适用于宇宙常数 Λ。有些人想摆脱它，声称宇宙常数为零，还想用一个完全未知的“暗能量”取而代之，来解释所观测到的宇宙加速膨胀——宇宙常数可以合理地解释这一现象。不过，宇宙常数如今被解释为基本长度 L_Λ 平方的倒数[①]。如果宇宙常数为零（$\Lambda = 0$），相当于赋予基本长度一个无穷的值。让我们回想一下，最

① 基本长度 L_Λ 也是曲率半径。

近的观测结果表明 Λ 为非零值（0.7 个天文单位）。

宇宙学并不是无穷唯一的藏身之地。大家都知道，光速 c 是一个有限的数字。然而，一个物体若要以光速移动，就需要无穷的能量。因此，有限值 c 背后隐藏着一个物理上不可得的无穷。同样，绝对零度的有限值（–273.15℃）背后是不可达到的寒冷。你有机会可以去实验室里看看，想要把一丁点儿物质样本降到绝对零度的百万分之一，需要多么巨大的努力！若想把一个物体冷却到开尔文温度，恐怕需要无穷的努力吧？

此外，黑洞的视界处于绝对有限的距离上。然而，如果从视界发射出的一个光子想要抵达地球的话，需要花费无穷的时间（其实我们应该换个词来表达）；况且，就算光子能抵达我们，伴随的也是无止境的能量衰退！同样，一个光子发射到大爆炸奇点，旅程耗时也是有限的（138 亿年），但光子也会经历无限的能量衰减。这些过程都包含着有限和无穷的值，而描述的其实是同一个现象。

因此，物理学中的无穷量既不神秘也非悖论。只要我们不被它欺骗，并弄清自己正在谈论什么就行了：我们选用一个合适的量，而且可以测量这个量，其有穷或无穷的性质有着极其精确的意义。

宇宙学：无穷获得认可

> “无穷很长，通向尽头。”
>
> ——皮埃尔·达克

宇宙学表明，没有必要将无穷从整个物理学中清除出去，相反，无穷可以帮助物理学家。这一点非常具有启发意义！牛顿曾说过：

“星星不会落下，因为在无限的宇宙中，没有可供它落下的中心点。”事实上，宇宙学是无穷的“乐土”：过去或未来的空间与时间无穷大；原始奇点联系着无穷大或无穷小。宇宙学在接受了无穷的概念后，也取得了进步。科学史学家亚历山大·柯瓦雷抛弃了古人推崇的封闭世界，他支持宇宙空间的无穷，从而开启了现代宇宙学。这看似很矛盾，因为物理学家的基本研究方法往往是消除无穷。今天，宇宙学或许是物理学中唯一能既没有悖论，也没有矛盾，完全平静地谈论有穷和无穷问题的分支学科了。在这里，无穷和有穷都能被接受。

无穷在宇宙学里获得特殊地位，或许是因为大爆炸模型代表了科学方法的原型。大爆炸模型也因此不得不面对众多错误的批判，而大爆炸模型的捍卫者也因此被迫竭力完善这一模型，改善其在认识论中的地位，让其与科学进程保持一致。因而，大爆炸模型地位牢固，远远超过了量子物理学等理论。同时在几十年间，精确的观察结果也带来了巨大惊喜，让大爆炸模型的捍卫者能进一步确认自己的理论。

应该消除无穷吗？

然而除了宇宙本身，每个物理系统都是有穷的，只包含数量有限的粒子和信息。因此，一个可测量的物理量永远不会用无穷表达。只有少数测量仪器为了方便起见具有无穷的刻度值，例如照相机的测距仪。对物理系统的描述是否会就此排除无穷呢？不可测量（无穷）是不可接受的吗？

我们对大自然的认知有限，让不可测量被误解和滥用。最明显

的例子就是平方根 $\sqrt{2}$ ，任何测量仪器都无法精确测得这个值，因为其小数部分是无限的——当然，所有无理数都是如此。理论与经验之间的这种巨大差异表明，彻底否认无穷是不合理的。

与数学家不同，现实生活中的有穷，让物理学很难泰然地看待无穷的问题。亚里士多德曾言道，他将无穷视为概念“武器库”里的一个工具，但仅限于此。在其他理论中，一个真实、可能的无穷其实掩藏在一个“视界”之后。这一当代物理学的新概念所表达的是宏观无穷或微观无穷的不可抵达性：它可能存在，但永远无法抵达。相对论中的宇宙视界或黑洞视界都是不可能超过光速的结果；“量子视界”则源于不确定性原理禁止将零（或无穷大）当成物理测量结果。

无论如何，有人认为如果一个理论中出现了无穷，就标志着该理论的有效性出现了极限，或者更糟，理论有一种需要立即治愈的“隐患”。康托尔让数学的无穷有了意义，而杰出的物理学家和数学家庞加莱却把康托尔的理论称为一种“病”。

无论如何，物理学家们否认无穷，并不是理性思考的行为。这源于一种无意识的情感吗？这是终极死亡驱动的结果吗？对无穷的想象力匮乏，是否来自无穷引发的恐惧？生命如此艰难，但总会有一个终点，不是唯有这一事实才能让我们安心吗？这正是雅克·拉康想说的：“生命是有限的，所有我们才能活下去。”“生命的终点”这种彻底的断裂切实影响着人类的心理构建，这或许能解释人们为何会对无穷予以粗暴的否认：我们迷恋于假设的彼世，相信它极有可能存在，所以将与之对立的无穷视为禁忌。

无论如何，从物理学的一个分支到另一个分支，无穷以各种各样的形式出现，并且，使用无穷往往是必不可少的。例如，数学和

物理学中的一个通用推导方法就是“极限法”。不论成功与否，人们试图挣脱无穷的过程带来了丰富的成果，产生了新的科学理论。

最终的结局看上去还是积极的：让我们以欣赏的心态、愉悦的心情看待无穷的出现吧！无穷从来没有妨碍过理论的生效。相反，它指明了理论的痛点，揭示了理论仍有待发展之处，甚至照亮了今后应该走的道路。消除每一个无穷都让理论更完善，从而产生新的无穷。无穷就像一只凤凰不断涅槃重生。所以，物理学家们还不如高呼：“无穷已死！无穷万岁！”

参考文献

经典论著

Archimède: *Œuvres*, les Belles Lettres, 1970-1971.

Aristote: *Physique; Traité du ciel*, éd. J. Tricot, Paris, Vrin, 1986.

Bolzano, Bernard: *Les Paradoxes de l'Infini*, trad. et notes de H. Sinaceur, Le Seuil/Sources du Savoir, 1999.

Bruno, Giordano: *Œuvres complètes*, les Belles Lettres, 1994; tome II: *Le souper des Cendres*, trad. Y. Hersant; tome III: *De l'infini, de l'univers et des Mondes*, trad. J.-P. Cavaillé.

Copernic, Nicolas: *Des révolutions des orbes célestes*, Les Belles Lettres, 2015.

Cuse, Nicolas de: *De la docte ignorance*, Paris, La Maisnie, 1979.

Descartes, René: *Discours de la méthode; la dioptrique, les météores et la géométrie*, Paris, Fayard, 1986.

Euclide: *Éléments*, traduction B. Vitrac, Paris, PUF, 1990-2001.

Fontenelle, Bernard Le Bovier de: *Éléments de la géométrie et de l'infini*, in *Œuvres complètes* VIII, Paris, Fayard, 2000.

Kant, Emmanuel: *Histoire générale de la nature et Théorie du ciel*, traduction J. Seidengart, Paris, Vrin, 1984.

Lucrèce: *De la nature des choses*, trad. B. Pautrat, Paris, Livre de poche, 2002.

Newton, Isaac: *Principes mathématiques de la philosophie naturell*e, trad. fr. de la marquise du Châtelet, 1756; nouvelle éd., Paris, Dunod, 2011.

Olbers, Heinrich: *La transparence de l'espace cosmique*, traduction J. Merleau-Ponty, dans *La Science de l'Univers* à *l'âge du positivisme*, Paris, Vrin, 1983.

Poe, Edgar Allan: *Eurêka*, in *Contes, essais, poèmes*, éd. C. Richard, Paris, Robert Laffont, coll. « Bouquins », 1989.

Presocratiques, Paris, Gallimard, «Bibliothèque de la Pléiade», 1988.

无穷与世界的多样性

Blay, Michel: *Les raisons de l'infini*, Gallimard 1993.

Collectif: *L'infini dans les sciences, l'art et la philosophie*, Éditions L' Harmattan, 2003.

Cohn, Jonas & Seidengart, Jean: *Histoire de l'infini: Le Problème de l'infini dans la pensée occidentale jusqu'à Kant*, Paris, Cerf (1994).

Dick, Stephen J.: *La Pluralité des Mondes*, Actes Sud, 1989.

Koyré, Alexandre: *Du monde clos* à *l'univers infini*, Paris, Gallimard, 1988; Le Livre de Poche, 1992.

Koyré, Alexandre: *Études newtoniennes*, Paris, Gallimard, 1968.

Lachièze-Rey, Marc & Luminet, Jean-Pierre: *Figures du ciel*, Seuil/ BnF, 1998.

Levinas, Emmanuel: *Totalité et infini: Essai sur l'extériorité*, Paris: Le Livre de Poche, 1994.

Levy, Tony: *Figures de l'infini*, Seuil/Science ouverte, 1987.

Luminet, Jean-Pierre: *Les Bâtisseurs du Ciel: Copernic, Kepler, Galilée, Newton*, JC Lattès, 2010.

Monnoyeur, Françoise (coll.): *Infini des mathématiciens, infini des philosophes*, Belin, 1992.

Monnoyeur, Françoise (coll.): *Infini des philosophes, infini des astronomes*, Belin, 1999.

相对论和宇宙学

Friedmann, Alexandre et Lemaître, Georges: *Essais de cosmologie*, introd., trad. et notes de J.-P. Luminet et A. Grib, Paris, Seuil/ Sources du Savoir, 1997.

Harrison, Edward: *Cosmology*, Cambridge University Press, 2000, 2e éd.

Harrison, Edward: *Le Noir de la Nuit*, Paris, Le Seuil/Points Sciences, 1998.

Lachièze-Rey, Marc: *Initiation* à *la Cosmologie*, 5e éd., Dunod, 2013.

Lachièze-Rey, Marc: *Voyager dans le temps: la physique moderne et la temporalité,* Seuil/Sciences Ouvertes, 2013.

Lachièze-Rey, Marc: *Einstein* à *la plage: La relativité dans un transat,* Dunod, 2015.

Lehoucq, Roland: *L'Univers a-t-il une forme?,* Flammarion, 2004.

Luminet, Jean-Pierre: *Les trous noirs*, Le Seuil/Points, 1992.

Luminet, Jean-Pierre: *L'Univers chiffonné*, Fayard, 2e édition, 2005.

Gallimard/Folio-Essais, 2005.

Luminet, Jean-Pierre: *L'Invention du Big Bang*, 2e éd., Seuil/Points

Sciences, 2014.

Luminet, Jean-Pierre: *Le destin de l'univers: trous noirs et* énergie *sombre*, Fayard 2006; Gallimard, Folio Essais, 2010.

Tegmark, Max: *Notre univers mathématique*, Paris, Dunod, 2014.

数学

Collectif: *Les infinis*, Pour la Science, dossier spécial, décembre 2000.

Davis, Philip J. & Hersch, Reuben: *L'Univers mathématique*, Paris, Gauthier-Villars, 1991.

Delahaye, Jean-Paul: *Jeux finis et infinis*, Seuil/Science ouverte, 2010.

Rozsa, Péter: *Jeux avec l'infini*, Points, 2014.

量子物理与新理论

Cohen-Tannoudji, Gilles & Spiro, Michel: *La Matière Espace-Temps*, Gallimard/Folio essais, 1990.

Collectif: *La Physique des infinis*, La Ville brûle, 2013.

Connes, Alain: *Géométrie non commutative*, Dunod, 2005.

Greene, Brian: *L'univers élégant*, Gallimard/Folio essais, 2005.

Klein, Étienne: *Petit voyage dans le monde des quanta*, Flammarion/Champs, 2009.

Lachièze-Rey, Marc: *Au-delà de l'espace et du temps: la nouvelle physique*, Paris, Le Pommier, 2008.

Lévy-Leblond, Jean-Marc & Balibar, Françoise: *Quantique, Rudiments*, Dunod, 2007.

Rovelli, Carlo: *Par-delà le visible: La Réalité du monde physique et la Gravité quantique*, Odile Jacob, 2015.

Smolin, Lee: *Rien ne va plus en physique*, Dunod, 2007.

Smolin, Lee: *La Renaissance du temps*, Dunod, 2015.

文学

Blanqui, Louis Auguste: *L'éternité par les astres*, 1871; rééd.

Impressions nouvelles, 2002.

Borges, Jorge Luis: *L'Aleph; Discussion*, in *Œuvres complètes*, Gallimard, 1993.

Braffort, Paul: *Science et Littérature*, Diderot, 1998.

Calvino, Italo: *Temps zéro*, Seuil/Points, 1997.

Luminet, Jean-Pierre: *Les poètes et l'univers*, Le cherche midi, 2012.

Luminet, Jean-Pierre: *Illuminations: Cosmos et Esthétique*, Odile Jacob, 2011

Sinisgalli, Leonardo: *Horror Vacui,* 1945, traduction Jean-Yves Masson, Arfuyen, 1995.

Valery, Paul: *Cahiers*, Gallimard, 1974.

人名对照表

A

阿波罗尼奥斯（Apollonius）

莱昂·巴蒂斯塔·阿尔伯蒂（Leon Battista Alberti）

阿尔库塔斯（Archytas）

阿基米德（Archimedes）

托马斯·阿奎那（Thomas Aquinas）

路易·阿拉贡（Louis Aragon）

阿那克萨戈拉（Anaxagoras）

阿那克西曼德（Anaximander）

阿维森纳（Avicenna）

休·埃弗雷特（Hugh Everett）

莫里茨·柯内里斯·埃舍尔（Maurits Cornelis Escher）

亚瑟·爱丁顿（Arthur Eddington）

安萨里（Al-Ghazali）

安提丰（Antiphon）

海因里希·奥伯斯（Heinrich Olbers）

奥卡姆的威廉（William of Ockham）

尼古拉·奥利斯姆（Nicolas Oresme）

B

奥列林·巴罗（Aurélien Barrau）

巴门尼德（Parmenides ）

柏拉图（Plato）

乔治·戈登·拜伦（George Gordon Byron）

赫尔曼·邦迪（Hermann Bondi）

毕达哥拉斯（Pythagoras）

弗拉迪米尔·别林斯基（Vladimir Belinski ）

伯纳德·波尔查诺（Bernhard Bolzano）

雅诺什·波尔约（Janos Bolyai）

爱弥儿·波莱尔（Emile Borel）

卡尔·波普尔（Karl Popper）

尼尔斯·玻尔（Niels Bohr）

豪尔赫·路易斯·博尔赫斯（Jorge Luis Borges）

马克·博纳富瓦（Marc Bonnefoy）

保罗·布拉福特（Paul Braffort）

威廉·布莱克（William Blake）

路易·奥古斯特·布朗奇（Louis Auguste Blanqui）

鲁伊兹·布劳威尔（Luitzen Brouwer ）

菲利波·布鲁内莱斯基（Filippo Brunelleschi）

乔尔丹诺·布鲁诺（Giordano Bruno）

罗伯特·布罗特（Robert Brout）

C

D

E

F

皮埃尔・伐利农（Pierre Varignon）

约翰・菲罗帕纳斯（John Philoponus）

亚历山大・费里德曼（Alexander Friedmann）

皮埃尔・德・费马（Pierre de Fermat）

理查德・费曼（Richard Feynman）

伯纳德・勒・博弈尔・德・丰特奈尔（Bernard Le Bovier de Fontenelle）

亚伯拉罕・弗兰克尔（Abraham Fraenkel）

皮耶罗・德拉・弗朗切斯卡（Piero della Francesca）

理查德・福斯（Richard Voss）

G

高德纳（Donald Knuth）

托马斯・高尔德（Thomas Gold）

卡尔・弗里德里希・高斯（Carolus Fridericus Gauss）

尼古拉斯・哥白尼（Nicholas Copernicus）

库尔特・哥德尔（Kurt Gödel）

歌德（Goethe）

罗伯特・格罗斯泰斯特（Robert Grosseteste）

亚历山大・格罗腾迪克（Alexander Grothendieck ）

鲁宾・古德斯坦（Reuben Goodstein）

阿兰・古斯（Alan Guth）

H

埃德温·哈勃（Edwin Hubble）
艾萨克·马科维奇·哈拉尼科夫（Isaak Markovich Khalatnikov）
爱德蒙·哈雷（Edmund Halley）
詹姆斯·哈妥（James Hartle）
沃纳·海森堡（Werner Heisenberg）
约翰·惠勒（John Wheeler）
沃尔特·惠特曼（Walt Whitman）
史蒂芬·霍金（Stephen Hawking）
弗雷德·霍伊尔（Fred Hoyle）

J

威廉·吉尔伯特（William Gilbert）
伽利略（Galileo Galilei）

K

伯纳德·卡尔（Bernard Carr）
约翰尼斯·开普勒（Johannes Kepler）
伊曼纽尔·康德（Emmanuel Kant）
格奥尔格·康托尔（Georg Cantor）
劳伦斯·柯比（Laurence Kirby）
亚历山大·柯瓦雷（Alexandre Koyré）
保罗·科恩（Paul Cohen）

海里格·冯·科赫（Helge von Koch）

科斯特勒（Koestler）

哈斯代·克莱斯卡（Hasdai Crescas）

利奥波德·克罗内克（Leopold Kronecker ）

肯迪（Al-Kindi）

阿兰·孔涅（Alain Connes）

库萨的尼古拉斯（Nicolas de Cuse）

L

约瑟夫·拉格朗日（Joseph Lagrange）

雅克·拉康（Jacques Lacan）

皮埃尔–西蒙·德·拉普拉斯（Pierre-Simon de Laplace）

威廉·拉威尔（William Lawere）

贾科莫·莱奥帕尔迪（Giacomo Leopardi）

戈特弗里德·威廉·莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz）

托马斯·莱特（Thomas Wright）

约翰·海因里希·朗伯（Johann Heinrich Lambert）

乔治·勒梅特（Georges Lemaître）

托尼·勒维（Tony Levy）

大卫·勒维斯（David Lewis）

波恩哈德·黎曼（Bernhard Riemann）

索菲斯·李（Sophus Lie）

马丁·里斯（Martin Rees）

亚当·里斯（Adam Riess）

M

斯图尔特·穆勒（Stuart Mill）

N

艾萨克·牛顿（ Isaac Newton）

伯纳德·纽文泰特（Bernard Nieuwentijt）

诺瓦利斯（Novalis）

约翰·冯·诺依曼（John von Neumann）

O

欧多克索斯（Eudoxus）

欧几里得（Euclid）

莱昂纳多·欧拉（Leonhard Euler ）

P

伊格纳茨·加斯东·帕尔迪（Ignace-Gaston Pardies）

索尔·帕尔马特（Saul Perlmutter）

杰弗瑞·帕里斯（Jeffrey Paris）

帕斯卡（Blaise Pascal）

弗朗切斯科·帕特里齐（Francesco Patrizi）

亨利·庞加莱（Henri Poincaré）

沃尔夫冈·泡利（Wolfgang Pauli）

让·佩兰（Jean Perrin）

威廉·佩利（William Paley）

Q

S

T

泰比特・伊本・奎拉（Th ā bit ibn Qurra）

马克斯・泰格马克（Max Tegmark）

泰勒斯（Thales）

埃蒂安・坦皮尔（Étienne Tempier）

约翰・汤姆森（John Thomson）

阿兰・图灵（Alan Turing）

克罗狄斯・托勒密（Claudius Ptolemy）

W

保罗・瓦勒里（Paul Valéry）

赫尔曼・外尔（Hermann Weyl）

尤金・维格纳（Eugene Wigner）

亚历山大・维兰金（Alexander Vilenkin）

约翰・沃利斯（John Wallis）

X

莱昂纳多・西尼嘉里（Leonardo Sinisgalli ）

大卫・希尔伯特（David Hilbert）

彼得・希格斯（Peter Higgs）

勒内・夏尔（René Char）

辛尼斯加利（Sinisgalli）

Y

Z

De l'infini

一不小心，我们就会闯入“无穷”的领地。

在数学世界，一个数字除以零，就会让人陷入无穷的困惑。物理学家重视眼见为实的实验结论，一直试图消除无穷，但黑洞与量子理论的出现，却让他们再次陷入无穷的深渊。天文学家尝试勾勒宇宙的形状，在浩瀚的宇宙中从无穷大走到无穷小……“无穷”犹如一根神秘的绳索，串联起数学、物理学、天文学和哲学并行交错的神奇故事，一次次激励人类冲破认知的疆域，让我们对自身和世界的理解更广阔、更深邃。

“乔治·勒梅特天文学奖”与法兰西学术院“莫隆大奖”获得者联袂撰写无穷的故事。

人类的直接认知总是有限的，但“无穷”的概念超越了这种限制。无穷包含的广阔含义让人着迷。历史上，布鲁诺被处以火刑烧死，不仅仅是因为他宣传了“日心说”，更重要的是他宣传了“宇宙无穷”和“多重世界”，使得本来独一无二的“神降”变得普通无奇。所以，无穷貌似有些抽象，但它对人类认识的影响却十分深远。本书作者正是通过梳理无穷概念在天文学、数学和物理学三大领域中的故事，让我们一窥人类认识的曲折发展，非常值得一读。

——**中国科学院国家天文台研究员　苟利军**

图灵社区：iTuring.cn
反馈/投稿/推荐邮箱：contact@turingbook.com
读者热线：(010) 51095186-600
分类建议 数学 / 物理 / 天文
人民邮电出版社网址：www.ptpress.com.cn

ISBN 978-7-115-47919-8
9 787115 479198 >
ISBN 978-7-115-47919-8
定价：39.00元

看完了

如果您对本书内容有疑问，可发邮件至 contact@turingbook.com，会有编辑或作译者协助答疑。也可访问图灵社区，参与本书讨论。

如果是有关电子书的建议或问题，请联系专用客服邮箱：ebook@turingbook.com。

在这可以找到我们：

微博 @图灵教育：好书、活动每日播报
微博 @图灵社区：电子书和好文章的消息
微博 @图灵新知：图灵教育的科普小组
微信 图灵访谈：ituring_interview，讲述码农精彩人生
微信 图灵教育：turingbooks